

RECHTS-BIKATEGORIESTRUKTUREN IN TOPOLOGISCHEN KATEGORIEN

INAUGURAL - DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

des

Fachbereichs Mathematik

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Thomas Marny

aus Lübeck

1973



Digitized by the Internet Archive
in 2026

RECHTS-BIKATEGORIESTRUKTUREN IN TOPOLOGISCHEN KATEGORIEN

INAUGURAL - DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

des

Fachbereichs Mathematik

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Thomas Marny

aus Lübeck

1. Referent: Professor Dr. G. Preuß

2. Referent: Professor Dr. A. Dinghas

Tag der mündlichen Prüfung:

15. Feb. 1973

Tag der Promotion:



Meinen lieben Eltern
in Dankbarkeit
gewidmet

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	7
Kapitel I : Rechts-Bikategoriestrukturen in beliebigen Kategorien	21
1. I-Familien	21
2. Der Charakterisierungssatz von Freyd-Isbell- Kennison-Herrlich	26
3. P-reflektive Hüllen	28
4. Die extrem epi-reflektive Hülle $Q\mathfrak{f}$	31
Kapitel II : Rechts-Bikategoriestrukturen in topologischen Kategorien	34
1. Topologische Kategorien	34
2. Liften von rechts-Bikategoriestrukturen	37
3. Die α -iso-reflektive Hülle $I\mathfrak{f}$	41
4. $R\mathfrak{f}$ als der Durchschnitt von $I\mathfrak{f}$ und $Q\mathfrak{f}$	48
5. P-Präreflexionen	52
Kapitel III : Rechts-Bikategoriestrukturen in topologischen Kategorien über der Kategorie der Mengen	56
1. Allgemeines, Beispiele	56
2. Extrem epi-Präreflexionen in Ens^P	58
3. T^P_0 -Räume	70
4. Eine bijektive Zuordnung im "Verband" der epireflektiven Unterkategorien von Ens^P	75
5. Einfachheit epireflektiver Unterkategorien	80
6. Eine Charakterisierung der Ens -iso-reflektiven Hülle extrem epi-reflektiver Unterkategorien von Ens^P	82

Kapitel IV : Epireflektive Unterkategorien der	
Kategorie der topologischen Räume . . .	84
1. Bemerkungen zur T_0 -Reflexion	84
2. Die Ens-iso-reflektive Hülle $IQ\ell$	85
3. Die Ens-iso-reflektive Hülle $ID\ell$	87
4. Beispiele epireflektiver Unterkategorien von Ens^t	89
5. Die Reflexionen in die R_0 -Räume und die T_1 -Räume	93
6. Die Reflexionen in die R_1 -Räume und die T_2 -Räume	96
7. Die Reflexionen in die R_{1a} -Räume und die T_{2a} -Räume	98
8. Die Reflexionen in die T_3 -Räume und die regulären Räume	99
9. Die Reflexionen in die nulldimensionalen Räume und die nulldimensionalen T_0 -Räume	100
Kapitel V : Die einer rechts-Bikategoriestruktur	
zugeordnete topologische Kategorie . . .	102
1. Definition der topologischen Kategorie ℓ_ℓ^P . . .	102
2. ℓ_ℓ^P in Abhängigkeit von ℓ	105
3. ℓ_ℓ^P in Abhängigkeit von P	106
Literaturverzeichnis	108

Einleitung

In den letzten zehn Jahren hat das Studium der epireflektiven Unterkategorien einer Kategorie, insbesondere der Kategorie Ens^t der topologischen Räume, zunehmende Beachtung gefunden. Nach Herrlich [4] gibt es zu jeder Klasse $\mathcal{E} \subset \text{Ens}^t$ eine kleinste sie umfassende epireflektive Unterkategorie, die epireflektive Hülle $R\mathcal{E}$. Die epireflektiven Unterkategorien $\mathcal{E}$, zu denen es eine einelementige Klasse $\mathcal{E} = \{E\}$ mit $R\{E\} = \mathcal{E}$ gibt, heißen einfach. Nach Herrlich [4] und Mrówka [8] sind zum Beispiel die T_0 -Räume, die vollständig regulären Räume und die nulldimensionalen T_0 -Räume einfache epireflektive Unterkategorien von Ens^t . Dagegen sind die T_1 -Räume, die T_2 -Räume und die regulären Räume nicht einfach ([4], [8]). In diesem Zusammenhang ist es ein ungelöstes Problem geblieben, ob die T_3 -Räume einfach sind. Wir werden zeigen, daß die T_3 -Räume nicht einfach sind, indem wir nachweisen, daß andernfalls die regulären Räume einfach sein würden. Analog läßt sich zeigen, daß aus der Nichteinfachheit der T_1 -Räume bzw. der T_2 -Räume die Nichteinfachheit der von Davis [2] eingeführten R_0 -Räume bzw. R_1 -Räume folgt. Hierbei ist es wichtig, daß die Kategorie der topologischen Räume nicht nur eine (extrem mono, epi)-rechts-Bikategoriestruktur trägt, sondern eine weitere, von uns mit (initial, Ens-iso)-rechts-Bikategoriestruktur bezeichnet. Wir benutzen den von Kennison [7] geprägten Begriff der rechts-Bikategoriestruktur. Die von Ramaley und Wyler [16], [23] eingeführten topologischen Unterkategorien erweisen sich als genau die zu der (initial, Ens-iso)-rechts-Bikategoriestruktur gehörigen Unterkategorien, die Ens-iso-reflektiven. Zu jeder Klasse $\mathcal{E}$ existiert neben

der epireflektiven Hülle $R\mathcal{L}$ die Ens-iso-reflektive Hülle $I\mathcal{L}$, die kleinste $\mathcal{L}$ umfassende Ens-iso-reflektive bzw. topologische Unterkategorie von Ens^t . Betrachten wir alle epireflektiven Unterkategorien $\mathcal{A}$ von Ens^t , die die indis-kreten Räume enthalten, und alle epireflektiven Unterkatego-rien $\mathcal{L}$ von Ens^t , die in den T_0 -Räumen enthalten sind, so besitzt die Zuordnung, die jeder Kategorie $\mathcal{A}$ die Kategorie $\mathcal{A} \cap T_0$ zuordnet, eine inverse Zuordnung. Diese ordnet jeder Unterkategorie $\mathcal{L}$ gerade die Ens-iso-reflektive Hülle $I\mathcal{L}$ zu. Da man die T_1 -, T_2 - bzw. regulären Räume als den Durchschnitt der R_0 -, R_1 - bzw. T_3 -Räume mit den T_0 -Räumen erhält, gelangt man durch Bildung der Ens-iso-reflektiven Hülle der T_1 -, T_2 - bzw. der regulären Räume wieder zu den R_0 -, R_1 - bzw. den T_3 -Räumen. Davis hat in seiner 1961 veröffentlichten Arbeit [2] darauf hingewiesen, daß zwischen diesen Kategorien eine gewisse bijektive Zuordnung besteht. Da aber zu diesem Zeit-punkt die Theorie der rechts-Bikategoriestructuren noch unbe-kannt war, konnte der kategorielle Hintergrund dieser bijek-tiven Zuordnung nicht herausgearbeitet werden. Unter dieser bijektiven Zuordnung entsprechen sich auch die T_{3a} -Räume und die vollständig regulären Räume, die nulldimensionalen Räume und die nulldimensionalen T_0 -Räume. Die Nichteinfachheit der R_0 -, R_1 - und T_3 -Räume ist nun eine Folge des Satzes: Entspre-chen sich $\mathcal{A}$ und $\mathcal{L}$ unter der bijektiven Zuordnung, so ist $\mathcal{A}$ einfach genau dann, wenn $\mathcal{L}$ einfach ist. Zum Beweis dieses Satzes benötigen wir, daß die $\mathcal{L}$ -Reflexion eines Raumes aus $\mathcal{A}$ mit der T_0 -Reflexion übereinstimmt. Dies steht in engem Zusammenhang mit dem Satz, daß jede Epireflexion in Ens^t entweder bereits eine Ens-iso-Reflexion oder das Kompositum einer Ens-iso-Reflexion und anschließender T_0 -Reflexion ist.

Dieser Satz ist beachtenswert in Hinblick darauf, daß nach Herrlich [4] mit Ausnahme eines trivialen Falles jede Coreflexion in Ens^t eine in unserer Bezeichnung Ens-iso-Coreflexion ist, aber eine entsprechende Aussage nicht einmal für Epireflexionen zutrifft.

Die angeführten Sachverhalte lassen sich auf beliebige topologische Kategorien Ens^p über der Kategorie Ens der Mengen übertragen. Um unsere Aussagen nicht unnötig einzuschränken, gehen wir möglichst allgemein vor. In Kapitel I untersuchen wir rechts-Bikategoriestrukturen in einer beliebigen Kategorie $\mathcal{C}$; in Kapitel II in einer topologischen Kategorie α^p über einer Kategorie $\mathcal{A}$. In Kapitel III betrachten wir nur noch topologische Kategorien über der Kategorie der Mengen. Dieses Kapitel enthält die Hauptergebnisse, die wir dann in Kapitel IV auf die topologischen Räume anwenden. Kapitel V, in dem wir einer rechts-Bikategoriestruktur eine topologische Kategorie zuordnen, ist eine Fortsetzung von Kapitel I.

Kapitel I : Rechts-Bikategoriestrukturen in beliebigen Kategorien

In einer (I, P) -rechts-Bikategorie (Kennison [7]) läßt sich jeder Morphismus f eindeutig in ein Kompositum $f = f_1 \cdot f_0$ mit $f_1 \in I$ und $f_0 \in P$ zerlegen. Indem wir die Morphismenklasse I durch eine Klasse $\mathcal{J}$ von Pinseln ersetzen und für jeden Pinsel die eindeutige Existenz einer Faktorisierung in einen Pinsel aus $\mathcal{J}$ und einen Morphismus aus P postulieren, gelangen wir zu dem Begriff der $(\mathcal{J}, P)$ -rechts-Bikategorie. In jeder (I, P) -rechts-Bikategorie $\mathcal{C}$ zeichnen wir eine Klasse $\mathcal{J}(I)$ von Pinseln, die I -Familien, aus derart, daß $\mathcal{C}$ eine $(\mathcal{J}(I), P)$ -rechts-Bikategorie ist, falls $\mathcal{C}$ Produkte besitzt. Im Fall

der (extrem mono, epi)-rechts-Bikategoriestruktur erhält man so die extremen Quellen von Herrlich [4], im Fall der (mono, extrem epi)-rechts-Bikategoriestruktur die monomorphen Familien von Preuß [10] und für die (initial, Ens-iso)-rechts-Bikategoriestruktur die projektiv erzeugenden Familien von Čech [1]. Der Satz von Freyd-Isbell-Kennison-Herrlich nimmt für $(\mathcal{J}, P)$ -rechts-Bikategorien die folgende Form an: Eine Unterkategorie ist genau dann P -reflektiv, wenn sie abgeschlossen gegenüber $\mathcal{J}$ -Objekten ist. Die sonst bei diesem Satz übliche Voraussetzung der Existenz von Produkten ist nicht erforderlich. Dies ist insofern von Bedeutung, als jede topologische Kategorie $\mathcal{A}^P$ eine (initial-Pinsel, $\mathcal{A}$ -iso)-rechts-Bikategorie auch dann ist, wenn $\mathcal{A}^P$ bzw. $\mathcal{A}$ keine Produkte besitzen sollte. Aus dem Charakterisierungssatz von Freyd-Isbell-Kennison-Herrlich folgt bekannterweise die Existenz der P -reflektiven Hülle $P\mathcal{L}$ zu einer Klasse $\mathcal{L}$. Die von Kennison [7] gegebene Charakterisierung der P -reflektiven Hülle ergänzen wir durch $\mathcal{L}$ -Fortsetzbarkeitskriterien. Diese erhalten wir durch Übertragung der von Herrlich [4] für die epireflektive Hülle angegebenen $\mathcal{L}$ -Fortsetzbarkeitskriterien. Die P -reflektive Hülle $P\mathcal{A}$ einer reflektiven Unterkategorie $\mathcal{A}$ von $\mathcal{L}$ ist weiterhin dadurch charakterisiert, daß ein Objekt genau dann zu $P\mathcal{A}$ gehört, wenn seine $\mathcal{A}$ -Reflexion ein I -Morphismus ist. Aus der Kenntnis der $\mathcal{A}$ -Reflexion folgt die der $P\mathcal{A}$ -Reflexion, da gilt: Die $P\mathcal{A}$ -Reflexion ist der P -Faktor der $\mathcal{A}$ -Reflexion. Außerdem ist der I -Faktor der $\mathcal{A}$ -Reflexion wieder eine $\mathcal{A}$ -Reflexion. Indem wir für $\mathcal{A}$ die epireflektive Hülle $R\mathcal{L}$ wählen, erhalten wir für die (mono, extrem epi)-rechts-Bikategoriestruktur (die (initial, $\mathcal{A}$ -iso)-rechts-Bikategoriestruktur): Die Objekte aus der extrem epi-reflektiven

($\mathcal{O}$ -iso-reflektiven) Hülle sind genau diejenigen, für die die $R\ell$ -Reflexion ein Monomorphismus (initialer Morphismus) ist. Nach Preuß [10], [13] sind hierdurch gerade die von ihm eingeführten total ℓ -zusammenhangslosen Räume $Q\ell$ gegeben, so daß wir von ihm die Bezeichnung $Q\ell$ für die extrem epi-reflektive Hülle übernehmen. Die $Q\ell$ -Reflexion ($I\ell$ -Reflexion) ist der extrem epi-Faktor ($\mathcal{O}$ -iso-Faktor) der $R\ell$ -Reflexion. Das umgekehrte Problem, aus der $P\ell$ -Reflexion die $R\ell$ -Reflexion zu bestimmen, ist weitaus schwieriger. Gerade dadurch, daß wir im Fall einer topologischen Kategorie Ens^P dieses Problem für die $I\ell$ -Reflexion und die $R\ell$ -Reflexion unabhängig von ℓ lösen, gelangen wir zu den Hauptergebnissen der Arbeit.

Kapitel II : Rechts-Bikategoriestrukturen in topologischen Kategorien

Wir benutzen den Ausdruck "topologische Kategorien" für die von Wyler [22] eingeführten "top categories". An dieser Stelle sei erwähnt, daß Wyler das Wort "top" nicht nur als Abkürzung für "topological" sondern auch als Gegensatz zu "bottom" gewählt hat. Da sich diese doppelte Bedeutung von "top" nicht treffend ins Deutsche übersetzen läßt, benutzen wir die Bezeichnung "topologische Kategorie".

Nachdem wir Definitionen und Ergebnisse, insbesondere den Hauptsatz über geliftete adjungierte Funktoren, aus den Abhandlungen [20], [22] und [23] von Wyler zusammengestellt haben, untersuchen wir rechts-Bikategoriestrukturen in einer topologischen Kategorie $\mathcal{A}^P$ über einer Kategorie $\mathcal{A}$. Eine (I, P) -rechts-Bikategoriestruktur auf $\mathcal{A}$ läßt sich auf zwei Arten zu einer rechts-Bikategoriestruktur auf $\mathcal{A}^P$ liften, zu

der (initial-I, $\mathcal{A}$ -P)- und der ($\mathcal{A}$ -I, final-P)-rechts-Bikate-
goriestruktur. Die (initial-I)-Familien und die ($\mathcal{A}$ -I)-Fami-
lien lassen sich durch die I-Familien charakterisieren. Jede
Kategorie $\mathcal{A}$ trägt eine triviale, die (Mor $\mathcal{A}$, iso)-rechts-
Bikategoriestruktur. Ist $\mathcal{A}$ außerdem eine (extrem mono, epi)-
und eine (mono, extrem epi)-Bikategorie, so erhalten wir durch
Liften dieser drei Strukturen fünf nichttriviale Strukturen,
die (initial, $\mathcal{A}$ -iso)-, die (extrem mono, epi)-, die ($\mathcal{A}$ -extrem
mono, final-epi)-, die (initial-mono, $\mathcal{A}$ -extrem epi)- und die
(mono, extrem epi)-rechts-Bikategoriestruktur. In dieser Rei-
henfolge bezeichnen wir die Hüllen mit $I\mathcal{E}$, $R\mathcal{E}$, $Q'\mathcal{E}$, $R'\mathcal{E}$
und $Q\mathcal{E}$. Die $\mathcal{A}$ -iso-reflektiven Unterkategorien von $\mathcal{A}^P$ sind
die topologischen Unterkategorien. Eine Unterkategorie ist
genau dann $\mathcal{A}$ -iso-reflektiv, wenn sie reflektiv ist und die
indiskreten Räume Ind enthält. Dies hat zur Folge, daß $I\mathcal{E}$
bestimmt ist als die epireflektive Hülle $I\mathcal{E} = R(\mathcal{E} \cup \text{Ind})$. Ins-
besondere gehört $(A, x) \in \mathcal{A}^P$ genau dann zu $I\mathcal{E}$, wenn (A, x)
indiskret, ein extrem mono-Unterobjekt von (C, z) oder eines
Produktes $(B, \omega_B) \pi (C, z)$ ist, wobei (B, ω_B) indiskret und
 (C, z) ein Produkt von Objekten aus $\mathcal{E}$ ist. Čech [1] hat dies
für die Hüllenräume, die semi-uniformen Räume und die Proxi-
mitätsräume bewiesen. Die Klasse $I\mathcal{E}$ stellt die Verallgemei-
nerung des von Čech [1] definierten projektiven Erzeugnisses
einer Klasse $\mathcal{E}$ auf beliebige topologische Kategorien $\mathcal{A}^P$ dar.
Die fünf vorstehend aufgeführten Hüllen stehen in der Bezie-
hung $R'\mathcal{E} = I\mathcal{E} \cap Q\mathcal{E}$ und $R\mathcal{E} = I\mathcal{E} \cap Q'\mathcal{E}$. Ist $\mathcal{A}$ balanciert, so
reduziert sich die Anzahl der rechts-Bikategoriestrukturen
auf drei, und es ist $R\mathcal{E} = I\mathcal{E} \cap Q\mathcal{E}$. Die $R\mathcal{E}$ -Reflexion ist das
Kompositum der $Q\mathcal{E}$ -Reflexion und anschließender $I\mathcal{E}$ -Reflexion.
Gilt in $\mathcal{A}$, daß jeder Epimorphismus ein Retrakt ist, so ist

die $R\mathcal{E}$ -Reflexion auch das Kompositum der $I\mathcal{E}$ -Reflexion und anschließender $Q\mathcal{E}$ -Reflexion, ein Ergebnis, das wir im nächsten Kapitel für $\mathcal{A} = \text{Ens}$ noch wesentlich verschärfen.

Die $I\mathcal{E}$ -Reflexion eines Objektes $(A, x) \in \mathcal{A}^P$ ist

$1_A: (A, x) \longrightarrow (A, x_{\mathcal{E}})$, wobei die Struktur $x_{\mathcal{E}}$ definiert ist als $x_{\mathcal{E}} := \inf \{ p^*(f)(e) \mid f: (A, x) \longrightarrow (E, e), (E, e) \in \mathcal{E} \}$. Im Fall der topologischen Räume ist $x_{\mathcal{E}}$ die von den $\mathcal{E}$ -offenen Mengen erzeugte Topologie. Diese Konstruktion der $\mathcal{A}$ -iso-Reflexion gibt ebenso wie die beim Beweis des Satzes von Freyd-Isbell-Kennison-Herrlich auftretende wenig Einblick, wie die Reflexion eines Objektes wirklich aussieht. Ein etwas besseres Verständnis hierfür geben die durch die inneren Eigenschaften eines Objektes durch transfinite Induktion konstruierten Reflexionen, obwohl auch diese den Nachteil haben, daß sie auf die Existenz einer unbekannten Größe, hier einer Ordinalzahl, angewiesen sind. Durch transfinite Induktion wird zum Beispiel von Čech [1] die Ens-iso-Reflexion von den Hüllräumen in die topologischen Räume und von Thomas [19] die Ens-iso-Reflexion von den topologischen Räumen in die T_3 -Räume gewonnen. Wir zeigen, daß die Konstruktion durch transfinite Induktion nicht nur auf Ens-iso-Reflexionen, sondern allgemein auf P-Reflexionen im Fall einer (I, P) -rechts-Bikategorie-Struktur anwendbar ist. Hierzu führen wir die P-Präreflexionen ein, die sich von den P-Reflexionen durch die unter Umständen fehlende Idempotenz unterscheiden, und beweisen, daß man durch transfinite Konstruktion von einer P-Präreflexion zu einer P-Reflexion gelangt. Die P-Präreflexionen stellen eine Verallgemeinerung des von Sharpe, Beattie und Marsden [18] definierten Begriffs des "quotient on Top" dar. Dieser stimmt mit den epi-Präreflexionen in Ens^t überein.

Kapitel III : Rechts-Bikategoriestrukturen in topologischen Kategorien über der Kategorie $\mathbf{Ens}$ der Mengen

Die extrem epi-reflektiven Unterkategorien von $\mathbf{Ens}^p$ stimmen mit den punkt-separierten Unterkategorien von Wyler [20] überein. Die von Wyler [20] für die Punkt-Separatoren bewiesenen Sätze lassen sich so interpretieren, daß zwischen den extrem epi-Präreflexionen und den strengen Punkt-Separatoren eine 1-1-Korrespondenz besteht, unter der sich insbesondere die extrem epi-Reflexionen und die groben Punkt-Separatoren entsprechen. Ist $\phi^{\text{är}}$ der zu einem Punkt-Separator ϕ gehörige strenge Punkt-Separator, so gilt für die durch ϕ bestimmte extrem epi-reflektive Unterkategorie: Die $\mathcal{L}$ -Reflexion erhält man durch transfinite Konstruktion aus der zu $\phi^{\text{är}}$ gehörigen extrem epi-Präreflexion. Nach Ramaley und Wyler lassen sich die von ihnen in [16, §3] für die Cauchy-Räume gewonnenen Sätze unter Benutzung der in [20] behandelten Punkt-Separatoren auf beliebige Kategorien $\mathbf{Ens}^p$ übertragen, sie führen dies aber in [16] und [20] nicht weiter aus. Wir nehmen derartige Verallgemeinerungen vor. Die von ihnen zur Charakterisierung der d-biregulären Cauchy-Räume verwendeten Beweisideen benutzen wir, um zu zeigen: Ist $(s_{(A,x)})$ eine extrem epi-Präreflexion für die extrem epi-reflektive Unterkategorie $\mathcal{L}$, so ist $(A,x) \in I\mathcal{L}$ genau dann, wenn $s_{(A,x)}$ ein initialer Morphismus ist. Für einen $I\mathcal{L}$ -Raum (A,x) ist bereits $s_{(A,x)}$ die $\mathcal{L}$ -Reflexion. Der $\mathbf{Ens}$ -iso-Faktor der extrem epi-Präreflexion liefert eine $\mathbf{Ens}$ -iso-Präreflexion für die $I\mathcal{L}$ -Räume. Wir wenden dies an, um in den Kategorien $\mathbf{Ens}^t$ der topologischen Räume, $\mathbf{Ens}^l$ der Limesräume, $\mathbf{Ens}^u$ der uniformen Räume und $\mathbf{Ens}^{ul}$ der uniformen Limesräume die $\mathbf{Ens}$ -iso-reflektive Hülle $I\mathcal{L}$ zu charakterisieren.

In den bekannten topologischen Kategorien Ens^P lassen sich T_0 -Räume einführen. Wir zeigen, daß dies in jeder topologischen Kategorie Ens^P möglich ist. Unter allen epireflektiven, nicht Ens-iso-reflektiven Unterkategorien von Ens^P gibt es eine größte, und zwar die T_0^P -Räume. Die T_0^P -Reflexion läßt sich durch transfinite Konstruktion aus einer extrem epi-Präreflexion gewinnen. Während diese extrem epi-Präreflexion für Ens^t und Ens^u bereits die T_0 -Reflexion ist, ist dies aber im allgemeinen nicht der Fall, wie das Beispiel der Limesräume zeigt. Die IT_0^P -Räume sind dadurch charakterisiert, daß für sie die extrem epi-Präreflexion initial ist. Es ist $IT_0^t = \text{Ens}^t$ und $IT_0^u = \text{Ens}^u$. In Ens^{ul} besteht IT_0^{ul} aus den gesättigten uniformen Limesräumen von Wyler [21]. Deshalb nennen wir eine Kategorie Ens^P gesättigt, wenn $IT_0^P = \text{Ens}^P$ ist. In jeder Kategorie Ens^P gibt es eine größte gesättigte topologische Unterkategorie, und zwar IT_0^P . Jede topologische Unterkategorie einer gesättigten Kategorie ist gesättigt. Es gilt der folgende grundlegende Satz: Die Zuordnungen $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A} \cap T_0^P$ und $\mathcal{L} \mapsto I\mathcal{L}$ sind zueinander inverse Zuordnungen zwischen den epireflektiven Unterkategorien $\mathcal{A}$ von Ens^P mit indiskrete Räume $\subset \mathcal{A} \subset IT_0^P$ und den epireflektiven Unterkategorien $\mathcal{L}$ von Ens^P mit $P^D \subset \mathcal{L} \subset T_0^P$, wobei P^D die höchstens einelementigen Räume bezeichnet. Man beachte hierbei, daß die epireflektiven Unterkategorien $\mathcal{L}$ mit $P^D \subset \mathcal{L} \subset T_0^P$ genau die nicht Ens-iso-reflektiven Unterkategorien sind. Für eine gesättigte Kategorie Ens^P , insbesondere für Ens^t und Ens^u , zerfällt der "Verband" der epireflektiven Unterkategorien in zwei "isomorphe Unterverbände", der eine bestehend aus den Ens-iso-reflektiven Unterkategorien, der andere aus den nicht Ens-iso-reflektiven Unterkategorien. Entsprechen sich $\mathcal{A}$ und $\mathcal{L}$ unter

der bijektiven Zuordnung, in Zeichen $\mathcal{A} \longleftrightarrow \mathcal{L}$, so ist die $\mathcal{A}$ -Reflexion der Ens-iso-Faktor der $\mathcal{L}$ -Reflexion. Umgekehrt ist die $\mathcal{L}$ -Reflexion das Kompositum der $\mathcal{A}$ -Reflexion und anschließender T_0^P -Reflexion. Insbesondere ist jede Epireflexion eine Ens-iso-Reflexion oder das Kompositum einer Ens-iso-Reflexion und anschließender T_0^P -Reflexion. Dies benutzen wir, um zu zeigen: Ist $\mathcal{A} \longleftrightarrow \mathcal{L}$, so ist $\mathcal{A}$ einfach genau dann, wenn $\mathcal{L}$ einfach ist. Genauer gilt: Ist (E, e) ein extremer Cogenerator für $\mathcal{A}$, so ist der nach $\mathcal{L}$ reflektierte Raum $(E, e)_{\mathcal{L}}$ ein extremer Cogenerator für $\mathcal{L}$. Ist (E, e) ein extremer Cogenerator für $\mathcal{L}$, so ist der Produktraum $(E, e) \pi I_2, I_2$ der zweielementige indiskrete Raum, ein extremer Cogenerator für $\mathcal{A}$.

Nicht nur die epireflektive Hülle $R\mathcal{E}$ einer Klasse $\mathcal{E} \subset T_0^P$ ist durch $I\mathcal{E}$ und T_0^P bestimmt, nämlich als $R\mathcal{E} = I\mathcal{E} \cap T_0^P$, sondern auch die extrem epi-reflektive Hülle $Q\mathcal{E}$, und zwar ist $Q\mathcal{E} = \{(A, x) / \text{Der nach } I\mathcal{E} \text{ reflektierte Raum } (A, x)_{I\mathcal{E}} \text{ ist ein } T_0^P\text{-Raum}\}$. Als Beispiel erhalten wir, daß die T_{2b} -Räume von Thomas [19] mit den total regulär-zusammenhangslosen Räumen identisch sind. Abschließend geben wir eine Charakterisierung der Ens-iso-reflektiven Hülle der extrem epi-reflektiven Unterkategorien von Ens^P an.

Kapitel IV : Epireflektive Unterkategorien der Kategorie der topologischen Räume

Die extrem epi-Präreflexion für die T_0^P -Räume wurde in Kapitel III durch einen Punkt-Separator konstruiert, der sogar topologisch ist. In Ens^P gibt es daher eine ausgezeichnete coreflektive Unterkategorie, von der wir zeigen, daß sie in Ens^t mit den indiskret erzeugten Räumen übereinstimmt. Für die uniformen Räume erhält man so die coreflektive Unterkategorie aller

Räume $(X, \mathcal{U})$, für die $\mathcal{U}$ ein Hauptfilter ist.

Die Ens-iso-reflektiven Hüllen der von Preuß [11] eingeführten Klassen der total $\mathcal{E}$ -zusammenhangslosen Räume $Q\mathcal{E}$ und der $\mathcal{E}$ -diskontinuierlichen Räume $D\mathcal{E}$ lassen sich folgendermaßen charakterisieren

$$IQ\mathcal{E} = \left\{ (X, \mathcal{X}) / \begin{array}{l} \text{Jede offene Menge ist Vereinigung} \\ \text{von } \mathcal{E}\text{-Quasikomponenten.} \end{array} \right\}$$

$$ID\mathcal{E} = \left\{ (X, \mathcal{X}) / \begin{array}{l} \text{Jede offene Menge ist Vereinigung} \\ \text{von } \mathcal{E}\text{-Zusammenhangskomponenten.} \end{array} \right\}$$

Die $IQ\mathcal{E}$ -Reflexion $1_X: (X, \mathcal{X}) \longrightarrow (X, \psi_{IQ\mathcal{E}}\mathcal{X})$ und die $ID\mathcal{E}$ -Reflexion $1_X: (X, \mathcal{X}) \longrightarrow (X, \psi_{ID\mathcal{E}}\mathcal{X})$ sind bestimmt durch

$$\psi_{IQ\mathcal{E}}\mathcal{X} = \{O / O \in \mathcal{X}, \text{ und } O \text{ ist Vereinigung von } \mathcal{E}\text{-Quasikomponenten}\},$$

$$\psi_{ID\mathcal{E}}\mathcal{X} = \{O / O \in \mathcal{X}, \text{ und } O \text{ ist Vereinigung von } \mathcal{E}\text{-Zusammenhangskomponenten}\}.$$

Die $\mathcal{E}$ -Quasikomponenten ($\mathcal{E}$ -Zusammenhangskomponenten) von $(X, \mathcal{X})$ stimmen überein mit den T_0 -Quasikomponenten (T_0 -Zusammenhangskomponenten) von $(X, \psi_{IQ\mathcal{E}}\mathcal{X})$ ($(X, \psi_{ID\mathcal{E}}\mathcal{X})$).

Unter der bijektiven Zuordnung von Kapitel III entsprechen sich die folgenden epireflektiven Unterkategorien von Ens^t :

Ens^t	$\longleftrightarrow$	T_0 -Räume
R_0 -Räume	$\longleftrightarrow$	T_1 -Räume
R_1 -Räume	$\longleftrightarrow$	T_2 -Räume
R_{1a} -Räume	$\longleftrightarrow$	T_{2a} -Räume
R_{1b} -Räume	$\longleftrightarrow$	T_{2b} -Räume
T_3 -Räume	$\longleftrightarrow$	reguläre Räume
T_{3a} -Räume	$\longleftrightarrow$	vollständig reguläre Räume
nulldimensionale Räume	$\longleftrightarrow$	nulldimensionale T_0 -Räume
indiskrete Räume	$\longleftrightarrow$	höchstens einpunktige Räume

Hierbei ist $R_{1a} := IT_{2a}$, $R_{1b} := IT_{2b}$. Zwischen den sich entsprechenden Unterkategorien liegt keine epireflektive Unterkatego-

rie. Nach Herrlich [4] stimmt jede einfache epireflektive Unterkategorie $\mathcal{L}$ mit reguläre Räume $\mathcal{L} \subset T_0$ -Räume mit den T_0 -Räumen überein. Dies benutzen wir, um zu zeigen: Die T_0 -Räume und Ens^t sind die beiden einzigen einfachen epireflektiven Unterkategorien, die die regulären Räume umfassen. Insbesondere sind die R_0 -, R_1 -, R_{1a} -, R_{1b} - und T_3 -Räume epireflektive Unterkategorien ohne extreme Cogeneratoren. Für Ens^t ist $S \pi I_2$, S der Sierpinski-Raum, für die T_{3a} -Räume $R \pi I_2$ und für die nulldimensionalen Räume $D_2 \pi I_2$ ein extremer Cogenerator. Jeder endliche topologische Raum erzeugt entweder die höchstens einpunktigen Räume, die nulldimensionalen T_0 -Räume, die T_0 -Räume, die indiskreten Räume, die nulldimensionalen Räume oder Ens^t .

Thomas [19] hat eine innere Charakterisierung der T_3 -Reflexion angegeben, indem er diese durch transfinite Konstruktion aus einer Ens-iso-Präreflexion X^3 gewonnen hat. Die Strukturabbildungen χ_X^3 von X^3 sind gegeben durch $\chi_X^3 \mathcal{X} = \{ 0 / \text{Zu jedem Punkt } x \in 0 \text{ gibt es } 0_x \in \mathcal{X} \text{ mit } x \in 0_x \subset \overline{0_x} \subset 0 \}$. Auch für die R_0 -, R_1 - und R_{1a} -Räume lassen sich die Reflexionen durch transfinite Konstruktion aus einer durch innere Raumeigenschaften definierten Ens-iso-Präreflexion erhalten, und zwar

$$\begin{aligned} R_0 : \quad \chi_X^0 \mathcal{X} &= \left\{ 0 / \begin{array}{l} 0 \in \mathcal{X} \text{ und } 0 \text{ ist Vereinigung von} \\ \text{abgeschlossenen Mengen} \end{array} \right\} \\ R_1 : \quad \chi_X^1 \mathcal{X} &= \left\{ 0 / \begin{array}{l} 0 \in \mathcal{X} \text{ und je zwei Punkte } x \in 0, y \notin 0 \\ \text{besitzen disjunkte Umgebungen} \end{array} \right\} \\ R_{1a} : \quad \chi_X^{1a} \mathcal{X} &= \left\{ 0 / \begin{array}{l} 0 \in \mathcal{X} \text{ und je zwei Punkte } x \in 0, y \notin 0 \text{ besit-} \\ \text{zen disjunkte abgeschlossene Umgebungen} \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Die Reflexion nach $I\{\text{total zusammenhangslose Räume}\}$ ist

$$1_X : (X, \mathcal{X}) \longrightarrow (X, \psi_X^{IQ\{D_2\}} \mathcal{X}) \text{ mit } \psi_X^{IQ\{D_2\}} \mathcal{X} = \{ 0 / 0 \in \mathcal{X} \text{ und zu je zwei Punkten } x \in 0, y \notin 0 \text{ gibt es eine offen-abgeschlossene}$$

Menge O_{xy} mit $x \in O_{xy}, y \notin O_{xy}$. Die Reflexion in die null-dimensionalen Räume ist $1_X: (X, \mathcal{X}) \longrightarrow (X, \psi_X^{nd} \mathcal{X})$ mit $\psi_X^{nd} \mathcal{X} = \{O / O \text{ ist Vereinigung von offen-abgeschlossenen Mengen}\}$. Die Reflexion in die zugeordnete epi-reflektive, nicht Ens-iso-reflektive Unterkategorie ergibt sich durch anschließende T_0 -Reflexion. Die Reflexionen in die T_1 -, T_2 - und T_{2a} -Räume können wir auch direkt durch transfinite Konstruktion aus einer extrem epi-Präreflexion bzw. dem zugehörigen strengen Punkt-Separator Π erhalten. Es bieten sich die folgenden durch innere Eigenschaften bestimmten Punkt-Separatoren an

$$\begin{aligned} T_1 : \pi_X^1 \mathcal{X} &= \left\{ (x, y) / \begin{array}{l} \text{Es gibt } x=x_1, \dots, x_n=y, \text{ so daß von } x_i \text{ und} \\ x_{i+1} \text{ nicht jeder eine Umgebung besitzt,} \\ \text{die den anderen nicht enthält.} \end{array} \right\} \\ T_2 : \pi_X^2 \mathcal{X} &= \left\{ (x, y) / \begin{array}{l} \text{Es gibt } x=x_1, \dots, x_n=y, \text{ so daß } x_i \text{ und } x_{i+1} \\ \text{keine disjunkten Umgebungen besitzen.} \end{array} \right\} \\ T_{2a} : \pi_X^{2a} \mathcal{X} &= \left\{ (x, y) / \begin{array}{l} \text{Es gibt } x=x_1, \dots, x_n=y, \text{ so daß } x_i \text{ und } x_{i+1} \\ \text{keine disjunkten abgeschlossenen Umgebun-} \\ \text{gen besitzen.} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Sei $\pi_X \mathcal{X}$ die Äquivalenzrelation $\pi_X \mathcal{X} := \{(x, y) / \text{Jede offen-abgeschlossene Menge, die } x \text{ enthält, enthält auch } y\}$. Die Reflexion in die total zusammenhangslosen Räume ist die natürliche Abbildung $r: (X, \mathcal{X}) \longrightarrow (X/\pi_X \mathcal{X}, t_*(r)(\mathcal{X}))$, die Reflexion in die nulldimensionalen T_0 -Räume ist $r: (X, \mathcal{X}) \longrightarrow (X/\pi_X \mathcal{X}, t_*(r)(\psi_X^{nd} \mathcal{X}))$.

Kapitel V : Die einer rechts-Bikategoriestruktur zugeordnete topologische Kategorie

$\mathcal{C}$ sei eine P-colokal kleine (I, P) -rechts-Bikategorie mit Produkten, $\ell \in \mathcal{C}$. Für ein Objekt A kann $P_\ell^* A := \{h / h: A \longrightarrow B \text{ mit } B \in P_\ell \text{ und } h \in P\}$ als Menge aufgefaßt werden. h_1 sei frei-

ner als h_2 , wenn es einen Morphismus k mit $k \cdot h_1 = h_2$ gibt. Besitzt $\mathcal{L}$ verallgemeinerte Pushouts, so wird $P_{\mathcal{L}}^* A$ mit dieser Ordnung zu einem vollständigen Verband. Definieren wir außerdem $P_{\mathcal{L}}^*(f)(l) := (l \cdot f)_0^P$ für $f: A \rightarrow B$, $l \in P_{\mathcal{L}}^* B$, so ist hierdurch eine topologische Theorie $P_{\mathcal{L}}^*$ auf $\mathcal{L}$ gegeben. Die zugehörige topologische Kategorie bezeichnen wir mit $\mathcal{L}_{\mathcal{L}}^P$. Für $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}$ ist $\mathcal{L}_{\mathcal{L}}^P$ eine topologische Unterkategorie von $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}^P$ mit der $\mathcal{L}$ -iso-Reflexion $1_A: (A, h) \rightarrow (A, \alpha_C^{P\mathcal{L}} \cdot h)$, wobei $\alpha_C^{P\mathcal{L}}$ die $P\mathcal{L}$ -Reflexion von $C := \text{Ziel } h$ ist. Für zwei rechts-Bikategoriestructuren (I, P) und (J, S) mit $P \subset S$ sind durch $\varphi_A m := m_0^P$ die Strukturabbildungen φ_A eines topologischen Funktors $\phi: \mathcal{L}_{\mathcal{L}}^S \rightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{L}}^P$ definiert. Die Strukturabbildungen des zu ϕ linksadjungierten Funktors ψ sind gegeben durch $\psi_A h = \alpha_C^{S\mathcal{L}} \cdot h$, $h: A \rightarrow C$. Die durch ψ bestimmte coreflektive Unterkategorie ist $\psi \mathcal{L}_{\mathcal{L}}^P = \{(B, n) \mid (B, n) \in \mathcal{L}_{\mathcal{L}}^S \text{ und } n_1^I \text{ ist eine } S\mathcal{L}\text{-Reflexion}\}$. Die Coreflexion von $(A, m) \in \mathcal{L}_{\mathcal{L}}^S$ ist $1_A: (A, \alpha^{S\mathcal{L}} \cdot m_0^P) \rightarrow (A, m)$.

Die Arbeit wurde von Herrn Prof. Dr. G. Preuß angeregt und gefördert. Für seine freundliche Unterstützung danke ich ihm.

Kapitel I : Rechts-Bikategoriestrukturen in beliebigen Kategorien

1. I-Familien

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Wir bezeichnen mit $E_{\mathcal{C}}$ oder einfach E die Klasse der Epimorphismen von $\mathcal{C}$. Entsprechend bezeichne $M_{\mathcal{C}}$ oder einfach M die Klasse der Monomorphismen von $\mathcal{C}$. Von Kennison [7] übernehmen wir die folgende Definition:

1.1.1. Definition: I und P seien Klassen von Morphismen in $\mathcal{C}$. (I, P) heißt eine rechts-Bikategoriestruktur auf $\mathcal{C}$, falls gilt:

B_0 : Jeder Isomorphismus liegt in $I \cap P$.

B_1 : I und P sind abgeschlossen bezüglich der Komposition von Morphismen.

B_2 : Jeder Morphismus f läßt sich faktorisieren in der Form $f = f_1 \circ f_0$ mit $f_1 \in I$ und $f_0 \in P$. Diese Zerlegung ist eindeutig in dem Sinne, daß es zu jeder Faktorisierung $f = g \cdot h$ mit $g \in I$ und $h \in P$ einen Isomorphismus e gibt mit $e \cdot f_0 = h$ und $g \cdot e = f_1$.

B_3 : $P \subset E$

$\mathcal{C}$ wird dann als (I, P) -rechts-Bikategorie bezeichnet. Ist außerdem $I \subset M$, so heißt $\mathcal{C}$ auch eine (I, P) -Bikategorie.

Ein Pinsel $(f_i: A \longrightarrow B_i)_{i \in I}$ ($I \neq \emptyset$ Indexmenge, nicht zu verwechseln mit der Morphismenklasse I) in $\mathcal{C}$ ist eine Familie von Morphismen f_i in $\mathcal{C}$ mit gleicher Quelle. Indem wir für jeden Pinsel die Existenz einer Faktorisierung verlangen, erhalten wir durch Übertragung der obigen Definition die folgende:

1.1.2. Definition: $\mathcal{T}$ sei eine Klasse von Pinseln und $\mathcal{C}$ eine Klasse von Morphismen in $\mathcal{C}$. $\mathcal{C}$ heißt eine $(\mathcal{T}, P)$ -rechts-Bikategorie, falls gilt:

B_0 : Jeder Isomorphismus liegt in $\mathcal{T} \cap P$.

B_1 : $\mathcal{T}$ und P sind kompositionsabgeschlossen. Für Pinsel bedeutet dies, daß mit $(f_i: A \longrightarrow B_i)_{i \in I} \in \mathcal{T}$, $(f_{ik}: B_i \longrightarrow C_{ik})_{k \in K_i} \in \mathcal{T}$ für alle $i \in I$ auch $(f_{ik} \circ f_i: A \longrightarrow C_{ik}) \in \mathcal{T}$ ist.

B_2 : Jeder Pinsel $(f_i: A \longrightarrow B_i)_{i \in I}$ läßt sich faktorisieren in der Form $f_i = f_{1i} \circ f_0$ mit $(f_{1i})_{i \in I} \in \mathcal{T}$ und $f_0 \in P$. Diese Zerlegung ist eindeutig in dem Sinne, daß es zu jeder Zerlegung $f_i = g_i \circ h$ mit $(g_i)_{i \in I} \in \mathcal{T}$ und $h \in P$ einen Isomorphismus e gibt mit $e \circ f_0 = h$ und $g_i \circ e = f_{1i}$ für alle $i \in I$.

B_3 : $P \subset E$

Ist $\mathcal{C}$ eine $(\mathcal{T}, P)$ -rechts-Bikategorie, so ist $\mathcal{C}$ trivialerweise eine $(I(\mathcal{T}), P)$ -rechts-Bikategorie, wobei $I(\mathcal{T})$ aus allen Pinseln aus $\mathcal{T}$ mit einelementiger Indexmenge besteht. Der folgende Satz zeigt, daß diese Zuordnung zwischen $(\mathcal{T}, P)$ -rechts-Bikategoriestrukturen und (I, P) -rechts-Bikategoriestrukturen auf $\mathcal{C}$ bijektiv ist, falls $\mathcal{C}$ Produkte besitzt.

1.1.3. Definition: Sei (I, P) eine rechts-Bikategoriestruktur auf $\mathcal{C}$. Ein Pinsel $(f_i: A \longrightarrow B_i)_{i \in I}$ heißt I-Familie, wenn gilt: Ist $f_i = g_i \circ g$ eine Faktorisierung von (f_i) mit $g \in P$, so ist g bereits ein Isomorphismus. Es sei $\mathcal{T}(I)$ die Klasse aller I-Familien.

1.1.4. Satz: Besitzt $\mathcal{C}$ Produkte, so ist $\mathcal{C}$ eine $(\mathcal{T}(I), P)$ -rechts-Bikategorie. Es ist $I(\mathcal{T}(I)) = I$ und $\mathcal{T}(I(\mathcal{T})) = \mathcal{T}$.

Zum Beweis benötigen wir das folgende Lemma:

1.1.5. Lemma: Sei $\prod B_i$ das Produkt der Familie $(B_i)_{i \in I}$ mit den Projektionen $p_i: \prod B_i \rightarrow B_i$. Für eine Familie $(f_i: A \rightarrow B_i)_{i \in I}$ sei $f: A \rightarrow \prod B_i$ der eindeutig bestimmte Morphismus mit $p_i \circ f = f_i$ für alle $i \in I$. Es sind äquivalent:

- 1) $(f_i)_{i \in I}$ ist eine I-Familie.
- 2) f ist ein Morphismus aus I, kurz I-Morphismus.

Insbesondere ist die Familie $(p_i: \prod B_i \rightarrow B_i)_{i \in I}$ eine I-Familie.

Beweis: 1) $\Rightarrow$ 2): Sei $f = f_1 \circ f_0$ die (I, P) -Faktorisierung von f . Es ist $f_i = (p_i \circ f_1) \circ f_0$ mit $f_0 \in P$. Da (f_i) eine I-Familie ist, ist f_0 ein Isomorphismus und folglich $f \in I$.

2) $\Rightarrow$ 1): Sei $f_i = g_i \circ h$ mit $h \in P$. Es gibt genau ein g mit $p_i \circ g = g_i$ für alle $i \in I$. Dann ist $p_i \circ (g \circ h) = g_i \circ h = f_i = p_i \circ f$ und folglich $g \circ h = f$. Mit $f \in I$ folgt, daß h ein Isomorphismus ist (Eindeutigkeit der Faktorisierung).

Beweis des Satzes: Nach Kennison [7] ist I durch P eindeutig bestimmt als die Klasse $I = \{ g \mid \text{Aus } g = f \circ e \text{ und } e \in P \text{ folgt, daß } e \text{ ein Isomorphismus ist.} \}$. Daher ist $f \in I$ genau dann, wenn (f) eine I-Familie ist. Also ist $I(\mathcal{J}(I)) = I$.

B_0 und B_3 sind trivialerweise erfüllt.

B_1 : Seien die I-Familien $(f_i: A \rightarrow B_i)_{i \in I}$, $(g_{ik}: B_i \rightarrow C_{ik})_{k \in K_i}$, $i \in I$, gegeben. Nach dem Lemma sind $f: A \rightarrow \prod B_i$ und $g_i: B_i \rightarrow \prod C_{ik}$, $i \in I$, I-Morphismen, und nach Kennison ist dann auch $\prod g_i: \prod B_i \rightarrow \prod_{i \in I} \prod_{k \in K_i} C_{ik}$ ein I-Morphismus. Es gibt einen Isomorphismus $h: \prod_{i \in I} \prod_{k \in K_i} C_{ik} \xrightarrow{(i,k) \in \bigcup_{i \in I} \{i\} \times K_i} \prod_{i \in I} C_{ik}$ mit $p_{ik} \circ (h \circ \prod g_i \circ f) = g_{ik} \circ f_i$.

Da $h \cdot \prod g_i \cdot f$ ein I-Morphismus ist, ist nach dem Lemma

$(g_{ik} \cdot f_i)$ eine I-Familie.

B₂: Sei $(f_i: A \rightarrow B_i)_{i \in I}$ ein Pinsel in $\mathcal{C}$. $f = f_1 \cdot f_0$ sei die (I, P) -Faktorisierung des durch $p_i \cdot f = f_i$ bestimmten Morphismus f . Nach dem Lemma ist $(p_i \cdot f_1)_{i \in I}$ eine I-Familie und daher

$f_i = (p_i \cdot f_1) \cdot f_0$ eine $(I\text{-Familien}, P)$ -Faktorisierung von (f_i) .

Seien $f_i = g_i \cdot g_0 = h_i \cdot h_0$ zwei Faktorisierungen von (f_i) mit $g_0, h_0 \in P$ und $(g_i), (h_i)$ I-Familien. Bilde die (I, P) -Faktorisierungen $g_i = g_{i1} \cdot g_{i0}$ und $h_i = h_{i1} \cdot h_{i0}$. g und h seien bestimmt durch $p_i \cdot g = g_{i0}$ und $q_i \cdot h = h_{i0}$ (p_i, q_i Projektionen). Aus der Definition der I-Familie folgt sofort, daß mit (g_i) und (h_i) auch (g_{i0}) und (h_{i0}) I-Familien sind. g und h sind deshalb I-Morphismen. $g_{i1} \cdot (g_{i0} \cdot g_0) = f_i = h_{i1} \cdot (h_{i0} \cdot h_0)$ sind zwei (I, P) -Faktorisierungen von f_i . Also gibt es einen Isomorphismus l_i mit $g_{i1} = h_{i1} \cdot l_i$ und $l_i \cdot g_{i0} \cdot g_0 = h_{i0} \cdot h_0$. $l := \prod l_i$ ist ein Isomorphismus. Da $q_i \cdot l \cdot g \cdot g_0 = l_i \cdot p_i \cdot g \cdot g_0 = l_i \cdot g_{i0} \cdot g_0 = h_{i0} \cdot h_0 = q_i \cdot h \cdot h_0$ ist, ist $(l \cdot g) \cdot g_0 = h \cdot h_0$. Dies sind zwei (I, P) -Faktorisierungen von $h \cdot h_0$. Also gibt es einen Isomorphismus l' mit $l' \cdot g_0 = h_0$ und $h \cdot l' = l \cdot g$. Es ist $h_i \cdot l' = h_{i1} \cdot h_{i0} \cdot l' = h_{i1} \cdot q_i \cdot l \cdot g = h_{i1} \cdot l_i \cdot p_i \cdot g = g_{i1} \cdot g_{i0} = g_i$.

$\mathcal{I}(I(\mathcal{I})) = \mathcal{I}$ folgt daraus, daß für eine $(\mathcal{I}, P)$ -rechts-Bikategoriestruktur gilt: $\mathcal{I}$ ist durch P eindeutig bestimmt als die Klasse $\mathcal{I} = \{ (f_i) \mid \text{Ist } f_i = g_i \cdot g \text{ eine Faktorisierung von } (f_i) \text{ mit } g \in P, \text{ so ist } g \text{ bereits ein Isomorphismus.} \}$.

Sei nämlich $(f_i) \in \mathcal{I}$ und $f_i = g_i \cdot g$ mit $g \in P$. $g_i = g_{1i} \cdot g_0$ sei die $(\mathcal{I}, P)$ -Faktorisierung des Pinsels (g_i) . $g_{1i} \cdot (g_0 \cdot g) = f_i = f_i \cdot 1$ sind zwei $(\mathcal{I}, P)$ -Faktorisierungen von (f_i) . Nach B₂ gibt es einen Isomorphismus e mit $1 = e \cdot g_0 \cdot g$. Da außerdem $g \in P \subset E_{\mathcal{C}}$ ist, ist g ein Isomorphismus. Ist $f_i = f_{1i} \cdot f_0$ die $(\mathcal{I}, P)$ -Faktorisierung der $I(\mathcal{I})$ -Familie (f_i) , so ist f_0 ein Isomorphismus. Also

ist $f_0 \in \mathcal{J}$ und wegen B_1 auch $(f_{1i} \cdot f_0) = (f_i) \in \mathcal{J}$.

Nach Kennison erfüllen (I, P) -rechts-Bikategoriestrukturen die (I, P) -Diagonalbedingung, d. h. zu jeder kommutativen Beziehung $n \cdot f = g \cdot m$ mit $f \in P$ und $g \in I$ gibt es einen Morphismus r mit $r \cdot f = m$ und $g \cdot r = n$.

Entsprechend erfüllen die $(\mathcal{J}, P)$ -rechts-Bikategoriestrukturen die $(\mathcal{J}, P)$ -Diagonalbedingung, d. h. zu jeder kommutativen Beziehung $n_i \cdot f = g_i \cdot m$ mit $f \in P$ und $(g_i)_{i \in I} \in \mathcal{J}$ gibt es einen Morphismus r mit $r \cdot f = m$ und $g_i \cdot r = n_i$ für alle $i \in I$. Im Fall $\mathcal{J} = \mathcal{J}(I)$ sprechen wir auch von der $(I\text{-Familien}, P)$ -Diagonalbedingung.

Bew.: Seien $m = m_1 \cdot m_0$ und $n_i = n_{1i} \cdot n_0$ die $(\mathcal{J}, P)$ -Faktorisierungen von m und (n_i) . Nach B_2 gibt es zu den $(\mathcal{J}, P)$ -Faktorisierungen $(g_i \cdot m_1) \cdot m_0 = n_{1i} \cdot (n_0 \cdot f)$ einen Isomorphismus e mit $e \cdot (n_0 \cdot f) = m_0$ und $(g_i \cdot m_1) \cdot e = n_{1i}$. Setze $r := m_1 \cdot e \cdot n_0$.

1.1.6. Beispiel: Die Kategorie Ens der Mengen und Abbildungen ist eine $(\text{mono}, \text{epi})$ -Bikategorie. Da Ens Produkte besitzt, ist Ens auch eine $(\text{mono-Familien}, \text{epi})$ -rechts-Bikategorie. Eine Familie $(f_i: A \longrightarrow B_i)_{i \in I}$ von Abbildungen ist eine mono-Familie genau dann, wenn (f_i) die Punkte von A trennt. Durch $x \pi_{(f_i)} y$ genau dann, wenn $f_i(x) = f_i(y)$ für alle $i \in I$ ist, ist eine Äquivalenzrelation $\pi_{(f_i)}$ auf A definiert. Ist $g: A \longrightarrow A / \pi_{(f_i)}$ die natürliche Abbildung, so gibt es zu jedem $i \in I$ genau eine Abbildung $g_i: A / \pi_{(f_i)} \longrightarrow B_i$ mit $g_i \cdot g = f_i$. Dies ist die $(\text{mono-Familien}, \text{epi})$ -Faktorisierung der Familie $(f_i)_{i \in I}$.

2. Der Charakterisierungssatz von Freyd-Isbell-Kennison-Herrlich

1.2.1. Vereinbarung: Unter einer Unterkategorie verstehen wir immer eine volle Unterkategorie. Dann wird der Unterschied zwischen Unterkategorie und Unterklasse unerheblich. Ist X ein Objekt der Kategorie $\mathcal{C}$, so schreiben wir $X \in \mathcal{C}$.

1.2.2. Definitionen: $\mathcal{C}$ sei eine $(\mathcal{J}, P)$ -rechts-Bikategorie.

- 1) $\mathcal{C}$ heißt P-colokal klein, wenn es zu jedem $X \in \mathcal{C}$ eine Menge $\{f_i: X \longrightarrow Y_i\}$ von P -Morphismen gibt, die in dem Sinne repräsentativ ist, daß es zu jedem P -Morphismus $g: X \longrightarrow Y$ einen Morphismus $f_i: X \longrightarrow Y_i$ und einen Isomorphismus $h: Y_i \longrightarrow Y$ gibt mit $g = h \circ f_i$.
- 2) Sei $\mathcal{A}$ eine Unterkategorie von $\mathcal{C}$. $X \in \mathcal{C}$ heißt ein $\mathcal{J}$ -Objekt von $\mathcal{A}$, wenn es einen $\mathcal{J}$ -Pinzel $(f_i: X \longrightarrow A_i)$ mit $A_i \in \mathcal{A}$ gibt. Ist $\mathcal{J} = \mathcal{J}(I)$, so sprechen wir auch von I-Objekten. X heißt ein I-Unterobjekt von $\mathcal{A}$, wenn es einen I -Morphismus $f: X \longrightarrow A$ mit $A \in \mathcal{A}$ gibt. $\mathcal{A}$ heißt abgeschlossen gegenüber $\mathcal{J}$ -Objekten (I-Objekten, I-Unterobjekten), wenn jedes $\mathcal{J}$ -Objekt (I-Objekt, I-Unterobjekt) von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}$ liegt.
- 3) $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ heißt P-reflexiv, wenn $\mathcal{A}$ eine isomorphie-abgeschlossene, reflektive Unterkategorie ist derart, daß für jedes Objekt $X \in \mathcal{C}$ die $\mathcal{A}$ -Reflexion $r_X^{\mathcal{A}}: X \longrightarrow X_{\mathcal{A}}$ ein P -Morphismus ist.

Der Charakterisierungssatz von Freyd-Isbell-Kennison-Herrlich nimmt für $(\mathcal{J}, P)$ -rechts-Bikategorien die folgende Form an:

1.2.3. Satz: $\mathcal{C}$ sei eine P -colokal kleine $(\mathcal{J}, P)$ -rechts-Bikategorie. Eine Unterkategorie $\mathcal{A}$ ist P -reflexiv

genau dann, wenn $\mathcal{A}$ abgeschlossen gegenüber $\mathcal{T}$ -Objekten ist.

Zusatz: $\mathcal{C}$ sei eine P-colokal kleine $(\mathcal{I}, P)$ -rechts-Bikategorie mit Produkten. Für eine Unterkategorie $\mathcal{A}$ sind äquivalent:

- 1) $\mathcal{A}$ ist P-reflektiv.
- 2) $\mathcal{A}$ ist abgeschlossen gegenüber I-Objekten.
- 3) $\mathcal{A}$ ist abgeschlossen gegenüber Produkten und I-Unterobjekten.

Beweis: Sei $\mathcal{A}$ P-reflektiv, $(f_i: X \rightarrow A_i)$ ein $\mathcal{T}$ -Pinsel mit $A_i \in \mathcal{A}$ und $r: X \rightarrow X_{\mathcal{A}}$ die $\mathcal{A}$ -Reflexion von X . Es gibt genau ein $g_i: X_{\mathcal{A}} \rightarrow A_i$ mit $g_i \cdot r = f_i = f_i \cdot 1_X$. Aus der $(\mathcal{T}, P)$ -Diagonalbedingung folgt die Existenz eines $h: X_{\mathcal{A}} \rightarrow X$ mit $h \cdot r = 1_X$. Mit $P \in E_{\mathcal{C}}$ folgt hieraus, daß r ein Isomorphismus ist. Da $\mathcal{A}$ isomorphie-abgeschlossen ist, ist $X \in \mathcal{A}$.

Sei $\mathcal{A}$ abgeschlossen gegenüber $\mathcal{T}$ -Objekten und $X \in \mathcal{C}$. Da P-colokal klein ist, gibt es insbesondere einen Pinsel $(f_i: X \rightarrow A_i)$ mit $A_i \in \mathcal{A}$ derart, daß $\{f_i\}$ eine repräsentative Menge bezüglich der P-Morphismen $f: X \rightarrow A$ mit $A \in \mathcal{A}$ ist.

Sei $f_i = f_{1i} \cdot f_0$ die $(\mathcal{T}, P)$ -Faktorisierung des Pinsels (f_i) . $f_0: X \rightarrow A$ ist $\mathcal{A}$ -Reflexion von X , denn da $\mathcal{A}$ abgeschlossen gegenüber $\mathcal{T}$ -Objekten ist, ist zunächst $A \in \mathcal{A}$. Sei $g: X \rightarrow A'$ ein Morphismus mit $A' \in \mathcal{A}$. Ist $g = g_1 \cdot g_0$, $g_0: X \rightarrow A''$, die $(\mathcal{T}, P)$ -Faktorisierung von g , so ist $A'' \in \mathcal{A}$. Aus der Repräsentativität der Menge $\{f_i\}$ folgt die Existenz eines f_k und eines Isomorphismus h mit $h \cdot f_k = g_0$. Für $l := g_1 \cdot h \cdot f_{1k}$ ist $l \cdot f_0 = g$. Die Eindeutigkeit von l folgt aus $P \in E_{\mathcal{C}}$. Da jeder Isomorphismus ein $\mathcal{T}$ -Pinsel ist, ist $\mathcal{A}$ isomorphie-abgeschlossen.

Die Äquivalenz von 1) und 2) des Zusatzes ergibt sich aus dem Satz unter Benutzung von Satz 1.1.4. Aus Lemma 1.1.5. folgt die Äquivalenz von 2) und 3).

3. P-reflektive Hüllen

$\mathcal{C}$ sei eine P-colokal kleine (I, P) -rechts-Bikategorie mit Produkten. Aus dem Charakterisierungssatz folgt, daß der Durchschnitt von P-reflektiven Unterkategorien wieder P-reflektiv ist. Zu jeder Klasse $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$ gibt es daher eine kleinste P-reflektive Unterkategorie, die $\mathcal{E}$ umfaßt. Diese Unterkategorie bezeichnen wir als die P-reflektive Hülle $P\mathcal{E}$ von $\mathcal{E}$. Der folgende Satz ist teilweise eine Übertragung des Satzes 11.2.4. von Herrlich [4] auf (I, P) -rechts-Bikategorien. Wir benötigen dazu die folgende Definition von Herrlich. Ein Morphismus $f: X \longrightarrow Y$ heißt $\mathcal{E}$ -fortsetzbar, wenn zu jedem $g: X \longrightarrow E$ mit $E \in \mathcal{E}$ ein $\bar{g}: Y \longrightarrow E$ mit $g = \bar{g} \cdot f$ existiert.

1.3.1. Satz: Für $X \in \mathcal{C}$ sind äquivalent:

- 1) $X \in P\mathcal{E}$
- 2) X ist ein I-Objekt von $\mathcal{E}$.
- 3) X ist ein I-Unterobjekt eines Produktes von Objekten aus $\mathcal{E}$.
- 4) Jeder $\mathcal{E}$ -fortsetzbare P-Morphismus ist $\{X\}$ -fortsetzbar.
- 5) Jeder $\mathcal{E}$ -fortsetzbare P-Morphismus $f: X \longrightarrow Y$ ist ein Isomorphismus.
- 6) Jeder $\mathcal{E}$ -fortsetzbare Morphismus $f: X \longrightarrow Y$ ist ein I-Morphismus.

$P\mathcal{E}$ ist

- 1') die kleinste $\mathcal{E}$ umfassende P-reflektive Unterkategorie.
- 2') die kleinste $\mathcal{E}$ umfassende Unterkategorie von $\mathcal{C}$, die

abgeschlossen gegenüber I-Objekten ist.

- 3') die kleinste $\mathcal{E}$ umfassende Unterkategorie, die abgeschlossen gegenüber Produkten und I-Unterobjekten ist.
- 4') die größte Unterkategorie $\mathcal{A}$ von $\mathcal{C}$, für die jeder $\mathcal{E}$ -fortsetzbare P-Morphismus bereits $\mathcal{A}$ -fortsetzbar ist.

Beweis: Wir benutzen Schlußweisen von Kennison [7] und Herrlich [4]. Die Aussagen 2') und 3') und die Äquivalenz von 1), 2) und 3) sind eine Folge des Charakterisierungssatzes 1.2.3.

2) $\Rightarrow$ 4): Sei $f: Y_1 \longrightarrow Y_2$ ein $\mathcal{E}$ -fortsetzbarer P-Morphismus, $g: Y_1 \longrightarrow X$. Es gibt eine I-Familie $(f_i: X \longrightarrow E_i)$ mit $E_i \in \mathcal{E}$. Zu $f_i \circ g$ gibt es $g_i: Y_2 \longrightarrow E_i$ mit $g_i \circ f = f_i \circ g$. Aus der (I-Familien, P)-Diagonalbedingung folgt die Existenz eines $\bar{g}: Y_2 \longrightarrow X$ mit $\bar{g} \circ f = g$.

4) $\Rightarrow$ 5): Sei $f: X \longrightarrow Y$ ein $\mathcal{E}$ -fortsetzbarer P-Morphismus. Nach 4) gibt es zu 1_X einen Morphismus g mit $g \circ f = 1_X$. Mit $1_X \in I$ ist dann auch $f \in I$, also $f \in I \cap P$. $I \cap P$ besteht nach Kennison gerade aus allen Isomorphismen.

5) $\Rightarrow$ 6): $f = f_1 \circ f_0$ sei die (I, P)-Faktorisierung von $f: X \longrightarrow Y$. Mit f ist auch f_0 $\mathcal{E}$ -fortsetzbar. Also ist f_0 ein Isomorphismus und daher f ein I-Morphismus.

6) $\Rightarrow$ 1): Die $P\mathcal{E}$ -Reflexion $r: X \longrightarrow X_{P\mathcal{E}}$ ist $\mathcal{E}$ -fortsetzbar, also nach 6) ein I-Morphismus. Damit ist $r \in I \cap P$, also ein Isomorphismus. Da $P\mathcal{E}$ isomorphie-abgeschlossen ist, ist $X \in P\mathcal{E}$.

4') ist eine Folge der Äquivalenz von 1) und 4).

1.3.2. Satz: $\mathcal{A}$ sei eine reflektive Unterkategorie von $\mathcal{C}$.

Für $X \in \mathcal{C}$ sind äquivalent:

- 1) $X \in P\mathcal{A}$
- 2) X ist ein I-Unterobjekt von $\mathcal{A}$.
- 3) Die $\mathcal{A}$ -Reflexion $r_X^{\mathcal{A}}: X \longrightarrow X_{\mathcal{A}}$ ist ein I-Morphismus.

Ist $r_X^\alpha = r_{X1}^\alpha \cdot r_{X0}^\alpha$ die (I, P) -Faktorisierung von r_X^α ,
so ist $r_X^{P\alpha} = r_{X0}^\alpha$ und $r_{X_{P\alpha}}^\alpha = r_{X1}^\alpha$.

Beweis:

1) $\Rightarrow$ 2): Da $X \in P\alpha$ ist, ist X ein I -Unterojekt eines Produktes aus α . Als reflektive Unterkategorie ist α abgeschlossen gegenüber Produkten.

2) $\Rightarrow$ 3): Es gibt einen I -Morphismus $f: X \rightarrow A$ mit $A \in \alpha$. Zu f gibt es genau ein $g: X_\alpha \rightarrow A$ mit $g \cdot r_X^\alpha = f$. Mit $f \in I$ ist auch $r_X^\alpha \in I$.

3) $\Rightarrow$ 1): trivial

Sei $r_{X0}^\alpha: X \rightarrow Y$, $r_{X1}^\alpha: Y \rightarrow X_\alpha$. Da $P\alpha$ abgeschlossen gegenüber I -Unterojekten ist, ist $Y \in P\alpha$. Sei $f: X \rightarrow Z$ mit $Z \in P\alpha$ gegeben. Es gibt einen Morphismus $f_\alpha: X_\alpha \rightarrow Z_\alpha$ mit $f_\alpha \cdot r_X^\alpha = r_Z^\alpha \cdot f$, also $(f_\alpha \cdot r_{X1}^\alpha) \cdot r_{X0}^\alpha = r_Z^\alpha \cdot f$. Es ist $r_{X0}^\alpha \in P$ und $r_Z^\alpha \in I$, da $Z \in P\alpha$ ist. Nach der (I, P) -Diagonalbedingung gibt es $g: Y \rightarrow Z$ mit $g \cdot r_{X0}^\alpha = f$. Die Eindeutigkeit von g ist wegen $P \subset E_\mathcal{C}$ trivial. Also ist $r_X^{P\alpha} = r_{X0}^\alpha$.

Es ist $r_{X_{P\alpha}}^\alpha = r_{X1}^\alpha$, denn sei $h: Y \rightarrow A$ mit $A \in \alpha$ gegeben. Zu $h \cdot r_{X0}^\alpha: X \rightarrow A$ gibt es genau ein $l: X_\alpha \rightarrow A$ mit $h \cdot r_{X0}^\alpha = l \cdot r_X^\alpha = l \cdot r_{X1}^\alpha \cdot r_{X0}^\alpha$. Mit $P \subset E_\mathcal{C}$ folgt $h = l \cdot r_{X1}^\alpha$. Ist $l_1 \cdot r_{X1}^\alpha = l_2 \cdot r_{X1}^\alpha$, so ist $l_1 \cdot r_X^\alpha = l_2 \cdot r_X^\alpha$ und folglich $l_1 = l_2$.

(I, P) und (J, S) seien zwei rechts-Bikategoriestrukturen auf $\mathcal{C}$ derart, daß $P \subset S$ und $\mathcal{C}$ S -colokal klein ist. Dann ist $\mathcal{C}$ auch P -colokal klein. Da I durch P eindeutig bestimmt ist als die Klasse $I = \{g \mid \text{Ist } g = f \cdot e \text{ eine Faktorisierung von } g \text{ mit } e \in P, \text{ so ist } e \text{ bereits ein Isomorphismus}\}$, ist $J \subset I$. Mit Satz 1.3.1. folgt, daß $S\mathcal{C} \subset P\mathcal{C}$ ist für jede Unterkategorie $\mathcal{C}$ von $\mathcal{C}$. Nach dem vorhergehenden Satz gilt: Es ist $X \in P\mathcal{C}$

genau dann, wenn die $S\mathcal{E}$ -Reflexion von X ein I -Morphismus ist. Die $P\mathcal{E}$ -Reflexion ist der P -Faktor der $S\mathcal{E}$ -Reflexion.

Sei $\mathcal{C}$ eine $E_{\mathcal{C}}$ -colokal kleine (extrem mono, epi)-Bikategorie. Statt $E_{\mathcal{C}}$ -colokal klein sagt man auch einfach colokal klein. Für die epireflektive Hülle $E_{\mathcal{C}}\mathcal{E}$ einer Unterkategorie $\mathcal{E}$ übernehmen wir von Preuß [10] die Bezeichnung $R\mathcal{E}$. Da für eine (I, P) -rechts-Bikategoriestruktur $P \subset E_{\mathcal{C}}$ ist, ist $R\mathcal{E} \subset P\mathcal{E}$. Es folgt der Satz:

- 1.3.3. Satz: $\mathcal{C}$ sei eine colokal kleine (extrem mono, epi)- und (I, P) -rechts-Bikategorie mit Produkten. Die Aussagen 1) bis 6) von Satz 1.3.1. sind äquivalent zu:
- 7) X ist ein I -Unterobjekt von $R\mathcal{E}$.
 - 8) Die $R\mathcal{E}$ -Reflexion $r_X^{R\mathcal{E}} : X \longrightarrow X_{R\mathcal{E}}$ ist ein I -Morphismus.
 - 9) Es gibt einen I -Epimorphismus $f : X \longrightarrow Y$ mit $Y \in R\mathcal{E}$.
- 5') Insbesondere ist $P\mathcal{E}$ die größte $\mathcal{E}$ umfassende Unterkategorie $\mathcal{O}$ mit der Eigenschaft, daß für jedes Objekt aus $\mathcal{O}$ die $R\mathcal{E}$ -Reflexion ein I -Morphismus ist. Die $P\mathcal{E}$ -Reflexion ist der P -Faktor der $R\mathcal{E}$ -Reflexion.

4. Die extrem epi-reflektive Hülle $Q\mathcal{E}$

Als Beispiel betrachten wir den Fall, daß $\mathcal{C}$ eine colokal kleine (extrem mono, epi)- und (mono, extrem epi)-Bikategorie mit Produkten ist. Die folgende Definition entnehmen wir der Abhandlung [10] von Preuß.

- 1.4.1. Definition: Eine Familie $(f_i : X \longrightarrow Y_i)_{i \in I}$ heißt eine monomorphe Familie, wenn zu je zwei verschiedenen Morphismen $g, h : Z \longrightarrow X$ ein $j \in I$ mit $f_j \cdot g \neq f_j \cdot h$ existiert. Für $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$ bezeichne $Q\mathcal{E}$ die Klasse aller

Objekte X , zu denen es eine monomorphe Familie

$(f_i: X \rightarrow E_i)_{i \in I}$ mit $E_i \in \mathcal{E}$ gibt.

1.4.2. Lemma: Für $(f_i: X \rightarrow Y_i)_{i \in I}$ sind äquivalent:

- 1) (f_i) ist eine monomorphe Familie.
- 2) (f_i) ist eine mono-Familie.
- 3) Der durch $p_i \circ f = f_i$ bestimmte Morphismus $f: X \rightarrow \prod_{i \in I} Y_i$ ist ein Monomorphismus.

Beweis: Die Äquivalenz von 2) und 3) gilt nach Lemma 1.1.5., diejenige von 1) und 3) ist leicht zu verifizieren.

Die Aussagen des folgenden Satzes sind bereits größtenteils von Preuß in [10] und [13] bewiesen worden. Wir erhalten sie aus den Sätzen 1.3.1. und 1.3.3. über rechts-Bikategorien.

1.4.3. Satz: Für $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ sind äquivalent:

- 1) $\mathcal{A}$ ist extrem epi-reflektiv in $\mathcal{C}$.
- 2) $\mathcal{A}$ ist abgeschlossen gegenüber mono-Objekten.
- 3) $\mathcal{A}$ ist abgeschlossen gegenüber mono-Unterobjekten und Produkten.
 $\mathcal{Q}\mathcal{E}$ ist
 - 1) die extrem epi-reflektive Hülle von $\mathcal{E}$.
 - 2) die kleinste $\mathcal{E}$ umfassende Unterkategorie, die abgeschlossen gegenüber mono-Objekten ist.
 - 3) die kleinste $\mathcal{E}$ umfassende Unterkategorie, die abgeschlossen gegenüber mono-Unterobjekten und Produkten ist.
 - 4) die größte Unterkategorie $\mathcal{A}$ von $\mathcal{C}$, für die jeder $\mathcal{E}$ -fortsetzbare extreme Epimorphismus bereits $\mathcal{A}$ -fortsetzbar ist.
 - 5) die größte $\mathcal{E}$ umfassende Unterkategorie $\mathcal{A}$ mit der

Eigenschaft, daß für jedes Objekt aus $\mathcal{A}$ die $R\mathcal{E}$ -Reflexion ein Monomorphismus ist.

Für $X \in \mathcal{E}$ sind äquivalent:

- 1) $X \in Q\mathcal{E}$
- 2) X ist ein mono-Objekt von $\mathcal{E}$.
- 3) X ist ein mono-Unterobjekt eines Produktes von Objekten aus $\mathcal{E}$.
- 4) Jeder $\mathcal{E}$ -fortsetzbare extreme Epimorphismus ist $\{X\}$ -fortsetzbar.
- 5) Jeder $\mathcal{E}$ -fortsetzbare extreme Epimorphismus $f: X \longrightarrow Y$ ist ein Isomorphismus.
- 6) Jeder $\mathcal{E}$ -fortsetzbare Morphismus $f: X \longrightarrow Y$ ist ein Monomorphismus.
- 7) X ist ein mono-Unterobjekt von $R\mathcal{E}$.
- 8) Die $R\mathcal{E}$ -Reflexion von X ist ein Monomorphismus.
- 9) Es gibt einen Bimorphismus $f: X \longrightarrow Y$ mit $Y \in R\mathcal{E}$.

Die $Q\mathcal{E}$ -Reflexion ist der extrem epi-Faktor der $R\mathcal{E}$ -Reflexion.

Kapitel II : Rechts-Bikategoriestrukturen in topologischen Kategorien

Die Tatsache, daß die Theorien der topologischen Räume, der Hüllenräume, der uniformen Räume, der Proximitätsräume, der Limesräume, der uniformen Limesräume und einiger anderer Raumarten viele Gemeinsamkeiten aufweisen, führten Wyler [22] dazu, den Begriff der topologischen Kategorie zu entwickeln. Während uns in einer Kategorie im allgemeinen nur die (extrem mono, epi)- und die (mono, extrem epi)-Bikategoriestrukturen zur Verfügung stehen, finden wir in den topologischen Kategorien eine weitere, die (initial, $\mathcal{A}$ -iso)-rechts-Bikategoriestruktur vor. Die topologischen Kategorien gestatten daher eine reichhaltigere Bikategorietheorie. Aus diesem Grund beschränken wir unsere weiteren Untersuchungen auf topologische Kategorien.

1. Topologische Kategorien

In diesem Abschnitt stellen wir grundlegende Definitionen und Sätze aus den Arbeiten [20], [22] und [23] von Wyler zusammen und fügen einige weitere Definitionen hinzu.

$\mathcal{O}$ sei die Kategorie der geordneten Mengen und monotonen Abbildungen. $\mathcal{A}^{\circ}$ bezeichne die zu einer Kategorie $\mathcal{A}$ duale Kategorie.

Ein Funktor $p^*: \mathcal{A}^{\circ} \rightarrow \mathcal{O}$ heißt eine topologische Theorie auf $\mathcal{A}$, falls gilt:

- 1) Für jedes Objekt $A \in \mathcal{A}$ ist p^*A ein vollständiger Verband.
- 2) Für jeden $\mathcal{A}$ -Morphismus $f: A \rightarrow B$ bewahrt die monotone Abbildung $p^*(f): p^*B \rightarrow p^*A$ Infima, d. h. für jede Familie $(y_i)_{i \in I}$ in p^*B ist $p^*(f)(\inf_{i \in I} y_i) = \inf_{i \in I} p^*(f)(y_i)$.

Die Elemente aus p^*A heißen Strukturen auf A . Sind $x_1, x_2 \in p^*A$ mit $x_1 \leq x_2$, so heißt x_1 feiner als x_2 . Aus einer topologischen Theorie p^* läßt sich eine Kategorie $\mathcal{A}^p$ konstruieren. Die Objekte von $\mathcal{A}^p$ seien die Paare (A, x) mit $A \in \mathcal{A}$, $x \in p^*A$. Ein $\mathcal{A}^p$ -Morphismus $f: (A, x) \longrightarrow (B, y)$ sei ein $\mathcal{A}$ -Morphismus $f: A \longrightarrow B$ mit $x \leq p^*(f)(y)$ (genauer ist $f: (A, x) \longrightarrow (B, y)$ ein Tripel (x, f, y)). Die Morphismen aus $\mathcal{A}^p$ heißen stetig. Die Komposition in $\mathcal{A}^p$ sei durch diejenige in $\mathcal{A}$ definiert. Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt eine topologische Kategorie, wenn es eine Kategorie $\mathcal{A}$ und eine topologische Theorie p^* auf $\mathcal{A}$ gibt derart, daß $\mathcal{A}^p$ isomorph zu $\mathcal{C}$ ist. Ist $\mathcal{C}$ eine topologische Kategorie, so können wir o.B.d.A. annehmen, daß $\mathcal{C}$ die Form $\mathcal{A}^p$ hat.

Durch $V(A, x) := A$ und $Vf := f$ ist ein Funktor $V: \mathcal{A}^p \longrightarrow \mathcal{A}$ definiert, der als Projektionsfunktor bezeichnet wird. Für $A \in \mathcal{A}$ sei α_A das kleinste, ω_A das größte Element von p^*A . Durch $\alpha A := (A, \alpha_A)$, $\alpha f := f$ und $\omega A := (A, \omega_A)$, $\omega f := f$ sind Funktoren $\alpha, \omega: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}^p$ definiert. α ist linksadjungiert, ω rechtsadjungiert zu V . α_A heißt die diskrete, ω_A die indiskrete Struktur auf A .

Für $f: A \longrightarrow B$ sei $p_*(f): p^*A \longrightarrow p^*B$ definiert durch $p_*(f)(x) := \inf \{ y / y \in p^*B \text{ mit } x \leq p^*(f)(y) \}$. Es ist $x \leq p^*(f)(y)$ genau dann, wenn $p_*(f)(x) \leq y$ ist. Die Abbildung $p_*(f)$ bewahrt daher Suprema. Definiert man p_*A als den zu p^*A dualen Verband, so ist $p_*: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{O}$ eine topologische Theorie auf $\mathcal{O}$. p_* heißt die zu p^* duale topologische Theorie. Die zu p_* duale topologische Theorie ist p^* .

Ist $f: A \longrightarrow B$, $y \in p^*B$, so nennen wir $p^*(f)(y)$ die initiale

Struktur von y unter f . Ein $\mathcal{A}^P$ -Morphismus $f: (A, x) \longrightarrow (B, y)$ heißt initial, wenn $x = p^*(f)(y)$ ist. Ein Pinsel $(f_i: (A, x) \longrightarrow (B_i, y_i))_{i \in I}$ heißt initial, wenn $x = \inf_{i \in I} p^*(f_i)(y_i)$ ist. $p_*(f)(x)$ heißt die finale Struktur von x unter f . $f: (A, x) \longrightarrow (B, y)$ heißt final, wenn $y = p_*(f)(x)$ ist. $f: (A, x) \longrightarrow (B, y)$ heißt ein $\mathcal{A}$ -Isomorphismus, falls $f: A \longrightarrow B$ ein Isomorphismus in $\mathcal{A}$ ist.

$\mathcal{A}^P$ und $\mathcal{B}^Q$ seien topologische Kategorien mit den Projektionsfunktoren V und W . Ein Funktor $\tilde{\phi}: \mathcal{A}^P \longrightarrow \mathcal{B}^Q$ liftet einen Funktor $F: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, falls $W \cdot \tilde{\phi} = F \cdot V$ ist.

2.1.1. Satz: Sei $F: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ ein Funktor. $(\varphi_A)_{A \in \mathcal{A}}$ sei eine Familie von monotonen Abbildungen $\varphi_A: p^*A \longrightarrow q^*FA$, so daß $\varphi_A \cdot p^*(f)(y) \leq q^*(Ff)(\varphi_B y)$ für jeden Morphismus $f: A \longrightarrow B$ in $\mathcal{A}$ und jede Struktur $y \in p^*B$ ist. Dann ist durch $\tilde{\phi}(A, x) := (FA, \varphi_A x)$ und $\tilde{\phi} f := Ff$ ein Funktor $\tilde{\phi}$ definiert, der F liftet. Jeder Funktor, der F liftet, läßt sich so aus einer Familie $(\varphi_A)_{A \in \mathcal{A}}$ mit vorstehender Eigenschaft erhalten.

Die Abbildungen φ_A heißen die Strukturabbildungen des Funktors $\tilde{\phi}$. $\tilde{\phi}$ heißt straff über F , falls die Abbildungen φ_A Infima bewahren und $\varphi_A \cdot p^*(f) = q^*(Ff) \cdot \varphi_B$ für jeden Morphismus $f: A \longrightarrow B$ ist. $\tilde{\phi}$ heißt costraff über F , falls die Abbildungen φ_A Suprema bewahren und $\varphi_B \cdot p_*(f) = q_*(Ff) \cdot \varphi_A$ ist.

2.1.2. Hauptsatz über das Liften adjungierter Funktoren:

Liftet $\tilde{\phi}: \mathcal{A}^P \longrightarrow \mathcal{B}^Q$ den Funktor $F: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, so besitzt $\tilde{\phi}$ einen Linksadjungierten $\gamma: \mathcal{B}^Q \longrightarrow \mathcal{A}^P$, der einen Funktor $G: \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ liftet, genau dann, wenn G linksadjungiert zu F und $\tilde{\phi}$ straff über F ist.

Ψ ist dann costraff über G . Ist $(u_B)_{B \in \mathcal{B}} : 1_{\mathcal{B}} \longrightarrow F \cdot G$ eine zu F und G gehörige natürliche Transformation, so ist eine zu Φ und Ψ gehörige natürliche Transformation $(u_{(B,Y)})_{(B,Y) \in \mathcal{B} \times \mathcal{A}} : 1_{\mathcal{B} \times \mathcal{A}} \longrightarrow \Phi \cdot \Psi$ gegeben durch $u_{(B,Y)} = u_B : (B,Y) \longrightarrow (FGB, \varphi_{GB} \psi_{BY})$, wobei ψ_B die zu B gehörige Strukturabbildung von Ψ ist. Es ist $\psi_{BY} = \inf \{ x / x \in p^*GB \text{ mit } y \leq q^*(u_B)(\varphi_{GB}x) \}$.

Sei $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. Ein Funktor $\Phi : \mathcal{A}^p \longrightarrow \mathcal{A}^q$ heißt ein topologischer Funktor, falls Φ den Funktor $1_{\mathcal{A}}$ straff liftet. Die Strukturabbildungen ψ_A des linksadjungierten Funktors Ψ sind gegeben durch $\psi_{AY} = \inf \{ x / x \in p^*A \text{ mit } y \leq \varphi_A x \}$.

Ist $\mathcal{A}$ vollständig, so ist auch $\mathcal{A}^p$ vollständig, denn es gilt:

2.1.3. Satz: Es sei $\mathcal{J}$ eine kleine Kategorie und $D : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{A}^p$ ein Diagramm über $\mathcal{A}^p$, $D(i) = (D_i, y_i)$, $i \in \mathcal{J}$.

Ist $(l_i : L \longrightarrow V \cdot D(i))_{i \in \mathcal{J}}$ Limes des Diagramms

$V \cdot D : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{A}$ und ist $x := \inf_{i \in I} p^*(l_i)(y_i)$, so ist

$(l_i : (L, x) \longrightarrow (D_i, y_i))_{i \in \mathcal{J}}$ Limes des Diagramms D .

Insbesondere ist mit $\mathcal{A}$ auch $\mathcal{A}^p$ $\mathcal{J}$ -vollständig.

Ein analoger Satz gilt für die Colimiten und die Covollständigkeit von $\mathcal{A}^p$.

2. Liften von rechts-Bikategoriestrukturen

$\mathcal{A}^p$ sei eine topologische Kategorie über der $(\mathcal{J}, P)$ -rechts-Bikategorie $\mathcal{A}$. Auf $\mathcal{A}^p$ lassen sich zwei rechts-Bikategoriestrukturen erklären derart, daß der Projektionsfunktor Faktorisierungen bewahrt.

Sei H eine Klasse von Pinseln in $\mathcal{A}$. Ein Pinsel

$(f_i: (A, x) \longrightarrow (B_i, y_i))_{i \in I}$ in $\mathcal{A}^P$ heißt ein $\mathcal{A}$ -H-Pinsel, wenn $(f_i: A \longrightarrow B_i)_{i \in I}$ ein Pinsel aus H ist. Entsprechend werden $\mathcal{A}$ -H-Morphismen definiert, wenn H eine Klasse von Morphismen ist. Es sei

initial- $\mathcal{T}$ die Klasse aller initialen $\mathcal{A}$ - $\mathcal{T}$ -Pinsel,
 $\mathcal{A}$ -P die Klasse aller $\mathcal{A}$ -P-Morphismen,
 $\mathcal{A}$ - $\mathcal{T}$ die Klasse aller $\mathcal{A}$ - $\mathcal{T}$ -Pinsel
 final-P die Klasse aller finalen $\mathcal{A}$ -P-Morphismen.

Es gilt der folgende, leicht zu verifizierende Satz:

2.2.1. Satz: Ist $\mathcal{A}$ eine $(\mathcal{T}, P)$ -rechts-Bikategorie, so ist $\mathcal{A}^P$

- a) eine (initial- $\mathcal{T}$, $\mathcal{A}$ -P)-rechts-Bikategorie und
- b) eine $(\mathcal{A}$ - $\mathcal{T}$, final-P)-rechts-Bikategorie.

Die zu a) bzw. b) gehörige Faktorisierung eines Pinsels $(f_i: (A, x) \longrightarrow (B_i, y_i))_{i \in I}$ ist gegeben durch

$$\begin{array}{ccc} \text{a)} & (A, x) & \xrightarrow{f_i} (B_i, y_i) \\ & \searrow \scriptstyle g & \nearrow \scriptstyle g_i \\ & (C, \inf p^*(g_i)(y_i)) & \end{array} \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{ccc} \text{b)} & (A, x) & \xrightarrow{f_i} (B_i, y_i) \\ & \searrow \scriptstyle g & \nearrow \scriptstyle g_i \\ & (C, p_*(g)(x)) & \end{array},$$

wobei $A \xrightarrow{f_i} B_i = A \xrightarrow{g} C \xrightarrow{g_i} B_i$ die $(\mathcal{T}, P)$ -Faktorisierung des Pinsels $(f_i: A \longrightarrow B_i)_{i \in I}$ ist.

Sei $\mathcal{A}$ insbesondere eine (I, P) -rechts-Bikategorie mit Produkten. Dann ist $\mathcal{A}$ auch eine $(I\text{-Familien}, P)$ -rechts-Bikategorie. $\mathcal{A}^P$ ist

- a) eine (initial-I, $\mathcal{A}$ -P)-rechts-Bikategorie und damit auch eine (initial-I-Familien, $\mathcal{A}$ -P)-rechts-Bikategorie. Es ist $(f_i: (A, x) \longrightarrow (B_i, y_i))_{i \in I}$ eine initial-I-Familie genau dann, wenn $(f_i: A \longrightarrow B_i)_{i \in I}$ eine I-Familie und ein initialer Pinsel ist, also $\mathcal{T}(\text{initial-I}) = \text{initial-}\mathcal{T}(I)$.

- b) eine $(\mathcal{A}\text{-I}, \text{final-P})$ -rechts-Bikategorie und damit auch eine $(\mathcal{A}\text{-I-Familien}, \text{final-P})$ -rechts-Bikategorie. Es ist $(f_i: (A, x) \longrightarrow (B_i, y_i))_{i \in I}$ eine $\mathcal{A}\text{-I-Familie}$ genau dann, wenn $(f_i: A \longrightarrow B_i)_{i \in I}$ eine $I\text{-Familie}$ ist, also $\mathcal{T}(\mathcal{A}\text{-I}) = \mathcal{A} - \mathcal{T}(I)$.

Trivialerweise ist jede Kategorie $\mathcal{A}$ eine $(\text{Mor } \mathcal{A}, \text{iso})$ -rechts-Bikategorie, wobei $\text{Mor } \mathcal{A}$ die Klasse aller Morphismen in $\mathcal{A}$ bezeichne. Zur Bestimmung der Liftungen der

- 1) $(\text{extrem mono}, \text{epi})$ -Bikategoriestruktur,
- 2) $(\text{mono}, \text{extrem epi})$ -Bikategoriestruktur,
- 3) $(\text{Mor } \mathcal{A}, \text{iso})$ -rechts-Bikategoriestruktur

benötigen wir den folgenden Satz, der die verschiedenen Morphismen in einer topologischen Kategorie $\mathcal{A}^P$ charakterisiert. Der Beweis des Satzes bereitet keine Schwierigkeiten (siehe [6] und [22]).

2.2.2. Satz:

- 1) Die Monomorphismen in $\mathcal{A}^P$ sind genau die $\mathcal{A}$ -Monomorphismen.
- 2) Die Epimorphismen in $\mathcal{A}^P$ sind genau die $\mathcal{A}$ -Epimorphismen.
- 3) Die Isomorphismen in $\mathcal{A}^P$ sind genau die initialen $\mathcal{A}$ -Isomorphismen bzw. die finalen $\mathcal{A}$ -Isomorphismen.
- 4) Die extremen Monomorphismen in $\mathcal{A}^P$ sind genau die initialen $\mathcal{A}$ -extremen Monomorphismen.
- 5) Die extremen Epimorphismen in $\mathcal{A}^P$ sind genau die finalen $\mathcal{A}$ -extremen Epimorphismen.

Ist $\mathcal{A}$ balanciert, so stimmen die $\mathcal{A}$ -Isomorphismen mit den Bimorphismen in $\mathcal{A}^P$ überein.

Aus den Sätzen 2.2.1. und 2.2.2. folgt der Satz:

2.2.3. Satz:

- 1) Ist α eine (extrem mono, epi)-Bikategorie, so ist α^p
 - a) eine (extrem mono, epi)-Bikategorie,
 - b) eine (α -extrem mono, final-epi)-Bikategorie.
- 2) Ist α eine (mono, extrem epi)-Bikategorie, so ist α^p
 - a) eine (initial-mono, α -extrem epi)-Bikategorie,
 - b) eine (mono, extrem epi)-Bikategorie.
- 3) α^p ist eine
 - a) (initial, α -iso)-rechts-Bikategorie,
 - b) (Mor α^p , iso)-rechts-Bikategorie.

Ist α balanciert, so stimmen die Bikategoriestrukturen 1a) und 2a) sowie 1b) und 2b) überein.

2.2.4. Beispiel: Wir geben ein Beispiel dafür an, daß diese sechs rechts-Bikategoriestrukturen im allgemeinen verschieden sind. Ens^p sei eine topologische Kategorie über der Kategorie Ens der Mengen und Abbildungen, etwa Ens^p die Kategorie der topologischen Räume. Für $(A, x) \in \text{Ens}^p$ sei $q^*(A, x) := (\mathcal{P}(A), <)$, wobei $\mathcal{P}(A)$ die Potenzmenge von A ist, und für $f: (A, x) \rightarrow (B, y)$, $N \subset B$ sei $q^*(f)(N) := f^{-1}[N]$. Hierdurch ist eine topologische Theorie $q^*: \text{Ens}^{po} \rightarrow \mathcal{O}$ definiert. In der topologischen Kategorie Ens^{pq} ist eine p -stetige Abbildung q -stetig (initial, final) genau dann, wenn $M \subset f^{-1}[N]$ ($M = f^{-1}[N]$, $f[M] = N$) ist. Der Leser möge sich die fünf nichttrivialen Faktorisierungen von f klarmachen.

2.2.5. Bemerkung: Da die Menge $\{1_A: (A, x) \rightarrow (A, y) / y \in p^*A \text{ mit } x \leq y\}$ eine repräsentative Menge für die von (A, x) ausgehenden α -Isomorphismen ist, ist jede topologische Kategorie α^p α -iso-colokal klein. Allgemeiner gilt: α^p ist α -P-

colokal klein genau dann, wenn $\mathcal{A}$ P-colokal klein ist. Ist $(A, x) \in \mathcal{A}^P$ und $\{f_i: A \longrightarrow B_i\}$ eine repräsentative Menge von P-Morphismen, so ist $\{f_{iy}: (A, x) \longrightarrow (B_i, y) \mid y \in p^*B_i \text{ mit } x \leq p^*(f_i)(y), f_{iy} = f_i \text{ in } \mathcal{A}\}$ eine repräsentative Menge von $\mathcal{A}$ -P-Morphismen. Insbesondere ist mit $\mathcal{A}$ auch $\mathcal{A}^P$ colokal klein.

2.2.6. Satz: Sei $\mathcal{A}$ eine P-colokal kleine (I, P)-rechts-Bikategorie mit Produkten, $\Phi: \mathcal{A}^P \longrightarrow \mathcal{A}^Q$ ein topologischer Funktor.

- 1) Ist $\mathcal{L}$ eine $\mathcal{A}$ -P-reflektive Unterkategorie von $\mathcal{A}^P$, so ist $\Phi \mathcal{L} := \{\Phi(B, y) \mid (B, y) \in \mathcal{L}\}$ eine $\mathcal{A}$ -P-reflektive Unterkategorie von $\mathcal{A}^Q$.
- 2) Ist $\mathcal{L}$ eine $\mathcal{A}$ -P-reflektive Unterkategorie von $\mathcal{A}^Q$, so ist $\Phi^{-1} \mathcal{L} := \{(B, y) \mid \Phi(B, y) \in \mathcal{L}\}$ eine $\mathcal{A}$ -P-reflektive Unterkategorie von $\mathcal{A}^P$.

Beweis: Man zeigt, daß $\Phi \mathcal{L}$ und $\Phi^{-1} \mathcal{L}$ abgeschlossen gegenüber initial-I-Objekten sind. 1) und 2) folgen dann aus dem Charakterisierungssatz 1.2.3.

3. Die $\mathcal{A}$ -iso-reflektive Hülle $I\mathcal{L}$

In diesem Abschnitt untersuchen wir die (initial, $\mathcal{A}$ -iso)-rechts-Bikategoriestruktur und stellen den Zusammenhang mit den topologischen Unterkategorien von Wyler [23] und dem projektiven Erzeugnis von Čech [1] her.

Im allgemeinen Fall der (I, P)-rechts-Bikategorie sicherte uns die Existenz von Produkten, daß die I-Familien kompositionsabgeschlossen sind. Die initial-Familien sind auch ohne diese Voraussetzung kompositionsabgeschlossen. Obwohl daher ein Teil der nachstehenden Aussagen auch ohne die Existenz

von Produkten gilt, setzen wir voraus, um nicht ständig Fallunterscheidungen vornehmen zu müssen, daß $\mathcal{A}$ und damit auch $\mathcal{A}^P$ Produkte besitzt.

2.3.1. Bemerkung: Unter allen isomorphen (initial, $\mathcal{A}$ -iso)-Faktorisierungen eines Morphismus $f: (A, x) \longrightarrow (B, y)$ zeichnet sich die Faktorisierung $(A, x) \xrightarrow{1_A} (A, p^*(f)(y)) \xrightarrow{f'} (B, y)$ mit $f'=f$ in $\mathcal{A}$ durch ihre einfache Form aus.

2.3.2. Satz: Für einen Pinsel $(f_i: (A, x) \longrightarrow (B_i, y_i))_{i \in I}$ sind äquivalent:

- 1) $(f_i)_{i \in I}$ ist eine initial-Familie.
- 2) $(f_i)_{i \in I}$ ist ein initialer Pinsel.
- 3) Für jeden Morphismus $h: C \longrightarrow A$ und jede Struktur $z \in p^*C$ gilt: Ist $f_i \cdot h: (C, z) \longrightarrow (B_i, y_i)$ stetig für alle $i \in I$, so ist $h: (C, z) \longrightarrow (A, x)$ stetig.
- 4) $f: (A, x) \longrightarrow \prod_{i \in I} (B_i, y_i)$ ist initial.

Beweis: Nach Definition 1.1.3. ist (f_i) eine initial-Familie genau dann, wenn jeder $\mathcal{A}$ -Isomorphismus g , zu dem es einen Pinsel (g_i) mit $g_i \cdot g = f_i$ gibt, initial bzw. ein Isomorphismus ist.

1) $\Rightarrow$ 2): In der Faktorisierung $(A, x) \xrightarrow{f_i} (B_i, y_i) = (A, x) \xrightarrow{1_A} (A, \inf p^*(f_i)(y_i)) \xrightarrow{f'_i} (B_i, y_i)$ mit $f'_i = f_i$ in $\mathcal{A}$ ist 1_A ein $\mathcal{A}$ -Isomorphismus. Nach 1) ist dann 1_A initial. Also ist $x = p^*(1_A)(\inf p^*(f_i)(y_i)) = \inf p^*(f_i)(y_i)$.

2) $\Rightarrow$ 3): Ist $f_i \cdot h$ stetig für alle $i \in I$, so ist $z \leq \inf p^*(f_i \cdot h)(y_i) = \inf p^*(h)(p^*(f_i)(y_i)) = p^*(h)(\inf p^*(f_i)(y_i)) = p^*(h)(x)$ wegen 2).

3) $\Rightarrow$ 1): Sei $(A, x) \xrightarrow{g} (C, z) \xrightarrow{g_i} (B_i, y_i)$ eine Faktorisierung von (f_i) mit einem $\mathcal{A}$ -Isomorphismus g . In $\mathcal{A}$ gibt es $h: C \longrightarrow A$ mit $h \cdot g = 1_A$ und $g \cdot h = 1_C$. Es ist $z \leq p^*(g_i)(y_i) = p^*(g_i \cdot g \cdot h)(y_i) =$

$p^*(f_i \cdot h)(y_i)$. Also ist $f_i \cdot h: (C, z) \longrightarrow (B_i, y_i)$ stetig für alle $i \in I$. Nach 3) ist dann $h: (C, z) \longrightarrow (A, x)$ stetig, d. h. $z \leq p^*(h)(x)$. Damit ist $x \leq p^*(g)(z) \leq p^*(g)(p^*(h)(x)) = p^*(h \cdot g)(x) = x$, also ist g initial.

1) $\Leftrightarrow$ 4): Lemma 1.1.5.

2.3.3. Definition: Nach Wyler [23] heißt eine Unterkategorie

$\mathcal{L}$ von $\mathcal{A}^p$ eine topologische Unterkategorie, wenn gilt:

1) $\mathcal{L}$ ist abgeschlossen gegenüber Infima, d. h.:

Ist $(x_i)_{i \in I}$ eine Familie in p^*A mit $(A, x_i) \in \mathcal{L}$, so ist $(A, \inf_{i \in I} x_i) \in \mathcal{L}$.

2) $\mathcal{L}$ ist abgeschlossen gegenüber initial-Unterobjekten,

d. h.: Ist $f: A \longrightarrow B$, $(B, y) \in \mathcal{L}$, so ist $(A, p^*(f)(y)) \in \mathcal{L}$.

$\mathcal{L}$ ist eine topologische Unterkategorie von $\mathcal{A}^p$ genau dann, wenn durch $p_{\mathcal{L}}^*A := \{x / x \in p^*A \text{ und } (A, x) \in \mathcal{L}\}$ und $p_{\mathcal{L}}^*(f)(y) := p^*(f)(y)$ für $f: A \longrightarrow B$ und $y \in p_{\mathcal{L}}^*B$ eine topologische Theorie $p_{\mathcal{L}}^*: \mathcal{A}^0 \longrightarrow \mathcal{O}$ definiert ist. Es ist dann $\mathcal{L} = \mathcal{A}^{p_{\mathcal{L}}^*}$.

2.3.4. Beispiel: Es bezeichne Ind die Unterkategorie der indiskreten Räume (A, ω_A) , $\omega_A := \sup p^*A$. Da das Infimum über eine leere Menge die indiskrete Struktur ist, ist $\text{Ind} \subset \mathcal{L}$ für jede topologische Unterkategorie $\mathcal{L}$. Da $p^*(f)$ Infima bewahrt, ist $\omega_A = p^*(f)(\omega_B)$ für $f: A \longrightarrow B$. Da Ind außerdem trivialerweise abgeschlossen gegenüber Infima ist, ist Ind eine und zwar die kleinste topologische Unterkategorie von $\mathcal{A}^p$.

Der folgende Satz, der die $\mathcal{A}$ -iso-reflektiven Unterkategorien charakterisiert, wurde bereits größtenteils von Wyler in [20] gezeigt.

2.3.5. Satz: Für eine Unterkategorie $\mathcal{L}$ von $\mathcal{A}^p$ sind äquivalent:

- 1) $\mathcal{L}$ ist $\mathcal{A}$ -iso-reflektiv in $\mathcal{A}^{\mathcal{P}}$.
- 2) $\mathcal{L}$ ist abgeschlossen gegenüber initial-Objekten.
- 3) $\mathcal{L}$ ist abgeschlossen gegenüber initial-Unterobjekten und Produkten.
- 4) $\mathcal{L}$ ist eine topologische Unterkategorie.
- 5) $\mathcal{L}$ ist reflektiv in $\mathcal{A}^{\mathcal{P}}$, und die Reflexion erhält man durch Modifizierung der Struktur.
- 6) $\mathcal{L}$ ist eine isomorphie-abgeschlossene, reflektive Unterkategorie und $\text{Ind} \subset \mathcal{L}$.

Beweis: 1), 2) und 3) sind nach dem Charakterisierungssatz von Freyd-Isbell-Kennison-Herrlich äquivalent. Die Äquivalenz von 2) und 4) folgt leicht mit Satz 2.3.2.

1) $\Leftrightarrow$ 5): Ist $r: (A, x) \rightarrow (B, y)$ eine $\mathcal{A}$ -iso-Reflexion von (A, x) nach $\mathcal{L}$, so ist auch $1_A: (A, x) \rightarrow (A, p^*(r)(y))$ eine $\mathcal{A}$ -iso-Reflexion, denn $r: (A, p^*(r)(x)) \rightarrow (B, y)$ ist ein Isomorphismus. Hat die $\mathcal{L}$ -Reflexion die Form $1_A: (A, x) \rightarrow (A, x')$, so ist $\mathcal{L}$ trivialerweise $\mathcal{A}$ -iso-reflektiv.

1) $\Rightarrow$ 6): Die $\mathcal{L}$ -Reflexion $r: (A, \omega_A) \rightarrow (A, \omega_A)_{\mathcal{L}}$ ist ein initialer $\mathcal{A}$ -Isomorphismus.

6) $\Rightarrow$ 1): Sei $(A, x) \in \mathcal{A}^{\mathcal{P}}$ und $r: (A, x) \rightarrow (B, y)$ die $\mathcal{L}$ -Reflexion. Da $1_A: (A, x) \rightarrow (A, \omega_A)$ stetig und $(A, \omega_A) \in \mathcal{L}$ ist, gibt es genau einen Morphismus $\overline{1}_A: (B, y) \rightarrow (A, \omega_A)$ mit $\overline{1}_A \cdot r = 1_A$. Also ist $r: A \rightarrow B$ ein Schnitt in $\mathcal{A}$, insbesondere ein Monomorphismus in $\mathcal{A}$. Dann ist $r: (A, x) \rightarrow (B, y)$ ein Monomorphismus in $\mathcal{A}^{\mathcal{P}}$. $\mathcal{L}$ ist also monoreflektiv in $\mathcal{A}^{\mathcal{P}}$. Nach Preuß [13] ist $\mathcal{L}$ dann auch epireflektiv in $\mathcal{A}^{\mathcal{P}}$. Folglich ist $r: (A, x) \rightarrow (B, y)$ ein Epimorphismus in $\mathcal{A}^{\mathcal{P}}$ und damit $r: A \rightarrow B$ ein Epimorphismus in $\mathcal{A}$. Als Schnitt und Epimorphismus ist $r: A \rightarrow B$ ein Isomorphismus in $\mathcal{A}$.

Die $\mathcal{A}$ -iso-reflektive Hülle von $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}^p$ bezeichnen wir mit $I\mathcal{E}$. Der Buchstabe I soll an initial und $\mathcal{A}$ -Isomorphismus erinnern.

2.3.6. Satz: $I\mathcal{E}$ ist

- 1) die kleinste $\mathcal{E}$ umfassende $\mathcal{A}$ -iso-reflektive Unterkategorie.
- 2) die kleinste $\mathcal{E}$ umfassende Unterkategorie, die abgeschlossen gegenüber initial-Objekten ist.
- 3) die kleinste $\mathcal{E}$ umfassende Unterkategorie, die abgeschlossen gegenüber initial-Unterobjekten und Produkten ist.
- 4) die kleinste $\mathcal{E}$ umfassende topologische Unterkategorie.
- 5) die kleinste $\mathcal{E}$ umfassende Unterkategorie, deren Reflexion man durch Modifizierung der Struktur erhält.
- 6) die kleinste $\mathcal{E}$ und Ind umfassende reflektive und isomorphie-abgeschlossene Unterkategorie.
- 7) die größte Unterkategorie $\mathcal{L}$, für die jeder $\mathcal{E}$ -fortsetzbare $\mathcal{A}$ -Isomorphismus bereits $\mathcal{L}$ -fortsetzbar ist.

Ist $\mathcal{A}$ eine colokal kleine (extrem mono, epi)-Bikategorie, so gilt weiter:

- 8) die kleinste $\mathcal{E}$ und Ind umfassende epireflektive Unterkategorie, also $I\mathcal{E} = R(\mathcal{E} \cup \text{Ind})$.
- 9) die größte Unterkategorie $\mathcal{L}$ mit der Eigenschaft, daß für jedes Objekt aus $\mathcal{L}$ die $R\mathcal{E}$ -Reflexion initial ist.

Beweis: Die Aussagen 1) bis 7) folgen aus den Sätzen 1.3.1. und 2.3.5. Mit $\mathcal{A}$ ist auch $\mathcal{A}^p$ eine colokal kleine (extrem mono, epi)-Bikategorie (Satz 2.2.3., Bemerkung 2.2.5.). 9) folgt damit aus Satz 1.3.3. 8) ist eine Folge von 6).

Sei $\mathcal{L}$ eine topologische Unterkategorie von $\alpha^{\mathcal{P}}$. Nach Wyler [23] ist, wie sofort aus dem Hauptsatz 2.1.2. folgt, die $\mathcal{L}$ -Reflexion $\gamma_{\mathcal{L}}: \alpha^{\mathcal{P}} \rightarrow \mathcal{L} = \alpha^{\mathcal{P}}_{\mathcal{L}}$ costraff und ist gegeben durch $\gamma_{\mathcal{L}} x = \inf \{ x' / x \leq x' \text{ und } (A, x') \in \mathcal{L} \}$. Letzteres ergibt sich auch leicht folgendermaßen. Ist $\gamma_A: (A, x) \rightarrow (A, \bar{x})$ die $\mathcal{L}$ -Reflexion von (A, x) , so ist mit $\gamma_A: (A, x) \rightarrow (A, x')$ wegen der universellen Eigenschaft auch $\gamma_A: (A, \bar{x}) \rightarrow (A, x')$ stetig. Da $(A, \bar{x}) \in \mathcal{L}$ ist, ist dann $\bar{x} = \inf \{ x' / x \leq x' \text{ und } (A, x') \in \mathcal{L} \}$.

Für $\mathcal{E} \subset \alpha^{\mathcal{P}}$ und $(A, x) \in \alpha^{\mathcal{P}}$ sei $x_{\mathcal{E}} := \inf \{ p^*(f)(e) / f: (A, x) \rightarrow (E, e), (E, e) \in \mathcal{E} \}$. Aus der universellen Eigenschaft der $\mathcal{I}\mathcal{E}$ -Reflexion $\gamma_A: (A, x) \rightarrow (A, \bar{x})$ folgt $\bar{x} \leq x_{\mathcal{E}}$. Nach den Sätzen 1.3.1. und 2.3.2. ist $(B, y) \in \mathcal{I}\mathcal{E}$ genau dann, wenn es einen initialen Pinsel $(f_1: (B, y) \rightarrow (E_1, e_1))$ mit $(E_1, e_1) \in \mathcal{E}$ gibt. Hieraus folgt, daß $x_{\mathcal{E}} \leq \bar{x}$ ist. Die $\mathcal{I}\mathcal{E}$ -Reflexion ist also $\gamma_A: (A, x) \rightarrow (A, x_{\mathcal{E}})$. Da $\mathcal{II}\mathcal{E} = \mathcal{I}\mathcal{E}$ ist, stimmen die $\mathcal{II}\mathcal{E}$ - und die $\mathcal{I}\mathcal{E}$ -Reflexion überein, also ist $x_{\mathcal{II}\mathcal{E}} = x_{\mathcal{E}}$. Unter Berücksichtigung der Sätze 1.3.1. und 1.3.3. erhalten wir zusammenfassend die folgende lokale Charakterisierung von $\mathcal{I}\mathcal{E}$:

2.3.7. Satz: Für $(A, x) \in \alpha^{\mathcal{P}}$ sind äquivalent:

- 1) $(A, x) \in \mathcal{I}\mathcal{E}$
- 2) (A, x) ist ein initial-Objekt von $\mathcal{E}$.
- 3) (A, x) ist ein initial-Unterobjekt eines Produktes von Objekten aus $\mathcal{E}$.
- 4) Jeder $\mathcal{E}$ -fortsetzbare α -Isomorphismus ist $\{(A, x)\}$ -fortsetzbar.
- 5) Jeder $\mathcal{E}$ -fortsetzbare α -Isomorphismus $f: (A, x) \rightarrow (B, y)$ ist ein Isomorphismus.
- 6) Jeder $\mathcal{E}$ -fortsetzbare Morphismus $f: (A, x) \rightarrow (B, y)$ ist initial.

7) $x = \inf\{x' / x \leq x' \text{ und } (A, x') \in I\mathcal{E}\}$ bzw. $x = x_{\mathcal{E}}$ bzw. $x = x_{I\mathcal{E}}$

Ist $\mathcal{A}$ eine colokal kleine (extrem mono, epi)-Bikategorie, so gilt weiter:

8) (A, x) ist ein initial-Unterobjekt von $R\mathcal{E}$.

9) Die $R\mathcal{E}$ -Reflexion von (A, x) ist initial.

10) Es gibt einen initialen Epimorphismus $f: (A, x) \longrightarrow (B, y)$ mit $(B, y) \in R\mathcal{E}$.

Da $I\mathcal{E} = R(\mathcal{E} \cup \text{Ind})$ ist, erhalten wir fünf weitere Aussagen, wenn wir in 2) bis 6) $\mathcal{E}$ durch $\mathcal{E} \cup \text{Ind}$, initial durch extrem mono und $\mathcal{A}$ -Isomorphismus durch Epimorphismus ersetzen. Hervorgehoben sei.

11) (A, x) ist indiskret oder ein extrem mono-Unterobjekt von (C, z) oder eines Produktes $(B, \omega_B) \pi (C, z)$, wobei (C, z) ein Produkt von Objekten aus $\mathcal{E}$ ist.

Die $I\mathcal{E}$ -Reflexion ist der $\mathcal{A}$ -iso-Faktor der $R\mathcal{E}$ -Reflexion.

2.3.8. Bemerkung: In [1] untersucht Čech die projektive Erzeugung in den Kategorien der Hüllenräume, der semi-uniformen Räume und der Proximitätsräume. In den einzelnen Kategorien definiert er das projektive Erzeugnis $\text{proj } K$ einer Klasse K von Räumen als die Klasse aller Räume, zu denen es einen initialen Pinsel nach K gibt, d. h. $\text{proj } K = IK$. Die topologischen Kategorien gestatten eine allgemeine Behandlung der projektiven Erzeugung. Indem der Ausgangspunkt unserer Betrachtungen die (initial, $\mathcal{A}$ -iso)-rechts-Bikategoriestruktur war, konnten wir das projektive Erzeugnis als die zu einer rechts-Bikategoriestruktur gehörige Hülle deuten. Viele der von Čech angegebenen Sätze über die projektive Erzeugung sind daher eine Folge allgemeiner Sätze über rechts-Bikategorien.

4. $R\mathcal{E}$ als der Durchschnitt von $I\mathcal{E}$ und $Q\mathcal{E}$

Sei $\mathcal{A}$ eine colokal kleine (extrem mono, epi)- und eine (mono, extrem epi)-Bikategorie mit Produkten. Nach Satz 2.2.3. ist $\mathcal{A}^p$ eine colokal kleine (extrem mono, epi)-, ($\mathcal{A}$ -extrem mono, final-epi)-, (initial-mono, $\mathcal{A}$ -extrem epi)-, (mono, extrem epi)- und eine (initial, $\mathcal{A}$ -iso)-rechts-Bikategorie mit Produkten. In derselben Reihenfolge seien die entsprechenden Hüllen bezeichnet mit $R\mathcal{E}$, $Q'\mathcal{E}$, $R'\mathcal{E}$, $Q\mathcal{E}$ und $I\mathcal{E}$. Es ist $R\mathcal{E} \subset R'\mathcal{E} \subset I\mathcal{E}$, $R'\mathcal{E} \subset Q\mathcal{E}$, $R\mathcal{E} \subset Q'\mathcal{E} \subset Q\mathcal{E}$.

2.4.1. Satz: $R'\mathcal{E} = I\mathcal{E} \cap Q\mathcal{E}$, $R\mathcal{E} = I\mathcal{E} \cap Q'\mathcal{E}$

Ist $\mathcal{A}$ balanciert, so ist $R\mathcal{E} = I\mathcal{E} \cap Q\mathcal{E}$.

Beweis: Es ist $(A, x) \in I\mathcal{E} \cap Q\mathcal{E}$ genau dann, wenn es eine initial-Familie $(f_i: (A, x) \longrightarrow (E_i, e_i))_{i \in I}$ und eine mono-Familie $(f_j: (A, x) \longrightarrow (E_j, e_j))_{j \in J}$ gibt. Aus der Definition 1.1.3. der I-Familie folgt, daß die I-Familieneigenschaft beim Übergang zu einer umfassenderen Familie erhalten bleibt. Folglich ist $(f_k: (A, x) \longrightarrow (E_k, e_k))_{k \in I \cup J}$ eine initial-Familie und eine mono-Familie und damit eine initial-mono-Familie nach Satz 2.2.1. Also ist $(A, x) \in R'\mathcal{E}$. Da (f_i) eine extrem mono-Familie genau dann ist, wenn (f_i) eine initial-Familie und eine $\mathcal{A}$ -extrem mono-Familie ist, folgt analog $R\mathcal{E} = I\mathcal{E} \cap Q'\mathcal{E}$. Ist $\mathcal{A}$ balanciert, so ist $R\mathcal{E} = R'\mathcal{E}$ und $Q\mathcal{E} = Q'\mathcal{E}$, da die entsprechenden Bikategoriestrukturen übereinstimmen.

Sind in einer Kategorie $\mathcal{C}$ drei reflektive Unterkategorien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ und $\mathcal{V}$ mit $\mathcal{V} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ gegeben, so stellt sich das Problem, ob für alle $X \in \mathcal{C}$ gilt $r_X^{\mathcal{V}} = r_{X_{\mathcal{A}}}^{\mathcal{B}} \cdot r_X^{\mathcal{A}}$, kurz $r^{\mathcal{V}} = r^{\mathcal{B}} \cdot r^{\mathcal{A}}$. Dies ist genau dann der Fall, wenn für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt $A_{\mathcal{B}} \in \mathcal{A}$.

Bei festem $\mathcal{A}$ und $\mathcal{V}$ gibt es unter allen reflektiven Unterkategorien $\mathcal{L}$ mit $r^{\mathcal{V}} = r^{\mathcal{L}} \cdot r^{\mathcal{A}}$ eine größte, die wir mit $\mathcal{V}_{\mathcal{A}}$ bezeichnen. Sie ist gegeben durch $\mathcal{V}_{\mathcal{A}} = \{X \mid \text{Für alle } A \in \mathcal{A} \text{ und alle Morphismen } f: A \longrightarrow X \text{ gilt: } f \text{ läßt sich eindeutig über } r_A^{\mathcal{V}} \text{ faktorisieren.}\}$. Es ist $r_A^{\mathcal{V}_{\mathcal{A}}} = r_A^{\mathcal{V}}$ für alle $A \in \mathcal{A}$, $\mathcal{V} = \mathcal{A} \cap \mathcal{V}_{\mathcal{A}}$, $r^{\mathcal{V}} = r^{\mathcal{V}_{\mathcal{A}}} \cdot r^{\mathcal{A}}$, und $r^{\mathcal{V}} = r^{\mathcal{L}} \cdot r^{\mathcal{A}}$ ist äquivalent mit $\mathcal{V} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{V}_{\mathcal{A}}$. Gilt in $\mathcal{C}$ der Charakterisierungssatz von Freyd - Isbell-Kennison-Herrlich für P-reflektive Unterkategorien, so ist mit $\mathcal{V}$ auch $\mathcal{V}_{\mathcal{A}}$ P-reflektiv.

2.4.2. Satz: Sei $\mathcal{L} \subset \mathcal{A}^{\text{p}}$ eine epireflektive Unterkategorie und $\mathcal{E} \subset \mathcal{L}$. Es ist $r^{Q'\mathcal{E} \cap \mathcal{L}} = r^{\mathcal{L}} \cdot r^{Q'\mathcal{E}}$. Insbesondere ist $r^{R\mathcal{E}} = r^{I\mathcal{E}} \cdot r^{Q'\mathcal{E}}$.

Beweis: Wir zeigen, daß mit $(A, x) \in Q'\mathcal{E}$ auch $(A, x)_{\mathcal{L}} \in Q'\mathcal{E}$ ist. Wegen $\mathcal{E} \subset \mathcal{L}$ ist $Q'\mathcal{E} \subset Q'\mathcal{L}$ und $Q'\mathcal{E} = Q'(Q'\mathcal{E} \cap \mathcal{L})$, also $(A, x) \in Q'\mathcal{L}$ und $(A, x) \in Q'(Q'\mathcal{E} \cap \mathcal{L})$. Nach Satz 1.3.2. sind dann die $\mathcal{L}$ -Reflexion und die $(Q'\mathcal{E} \cap \mathcal{L})$ -Reflexion von (A, x) $\mathcal{A}$ -extreme Monomorphismen und, da sie sowieso Epimorphismen sind, sogar $\mathcal{A}$ -Isomorphismen. Die $\mathcal{L}$ -Reflexion bzw. die $(Q'\mathcal{E} \cap \mathcal{L})$ -Reflexion von (A, x) hat also die Form $1_A: (A, x) \longrightarrow (A, y)$ bzw. $1_A: (A, x) \longrightarrow (A, z)$. Wegen $Q'\mathcal{E} \cap \mathcal{L} \subset \mathcal{L}$ ist auch der $\mathcal{A}$ -extreme Monomorphismus $1_A: (A, y) \longrightarrow (A, z)$ stetig. Da $(A, z) \in Q'\mathcal{E}$ und $Q'\mathcal{E}$ abgeschlossen gegenüber $\mathcal{A}$ -extrem mono-Unterobjekten ist, ist $(A, y) = (A, x)_{\mathcal{L}} \in Q'\mathcal{E}$.

2.4.3. Folgerung: Ist $r: (A, x) \longrightarrow (B, p_*(r)(x))$ die final-epi-Reflexion von (A, x) nach $Q'\mathcal{E}$ und $A \xrightarrow{r} B = A \xrightarrow{r_0} C \xrightarrow{r_1} B$ die (mono, extrem epi)-Faktorisierung von r in $\mathcal{A}$, so gilt:

- 1) Die $\mathcal{A}$ -iso-Reflexion nach $I\mathcal{E}$ ist $1_A: (A, x) \longrightarrow (A, x_{\mathcal{E}})$.

- 2) Die epi-Reflexion nach $R\ell$ ist $r: (A, x) \longrightarrow (B, p_*(r)(x)_\ell)$.
- 3) Die extrem epi-Reflexion nach $Q\ell$ ist
 $r_0: (A, x) \longrightarrow (C, p_*(r_0)(x))$.
- 4) Die $\mathcal{A}$ -extrem epi-Reflexion nach $R'\ell$ ist
 $r_0: (A, x) \longrightarrow (C, p^*(r_0)(p_*(r)(x)_\ell))$.

Beweis: Satz 2.4.2. und Satz 1.3.3.

Sei $\mathcal{A}$ balanciert. Dann ist $r^{R\ell} = r^{I\ell} \cdot r^{Q\ell}$. Wir untersuchen nun, ob auch $r^{R\ell} = r^{Q\ell} \cdot r^{I\ell}$ ist.

2.4.4. Satz: Sei $r: (A, x) \longrightarrow (B, p_*(r)(x)_\ell)$ die $R\ell$ -Reflexion von (A, x) . Es sind äquivalent:

- 1) $r^{R\ell}_{(A, x)} = r^{Q\ell}_{(A, x)_{I\ell}} \cdot r^{I\ell}_{(A, x)}$
- 2) $p_*(r)(x)_\ell = p_*(r)(x_\ell)$

Beweis: 1) $\Rightarrow$ 2): Ist $1_A: (A, x) \longrightarrow (A, x_\ell)$ die $I\ell$ -Reflexion und $r': (A, x_\ell) \longrightarrow (C, p_*(r')(x_\ell))$ die $Q\ell$ -Reflexion von (A, x_ℓ) , so folgt aus 1), daß o.B.d.A. $C=B$, $r=r'$ in $\mathcal{A}$ und

$r: (A, x) \longrightarrow (B, p_*(r')(x_\ell))$ die $R\ell$ -Reflexion ist. Wegen $r'=r$ in $\mathcal{A}$ ist $p_*(r')(x_\ell) = p_*(r)(x_\ell)$. Es folgt 2).

2) $\Rightarrow$ 1): Wegen $R\ell \leq I\ell$ ist $r^{R\ell} = r^{R\ell} \cdot r^{I\ell}$ und folglich $r: (A, x_\ell) \longrightarrow (B, p_*(r)(x)_\ell)$ die $R\ell$ -Reflexion von (A, x_ℓ) . Die $Q\ell$ -Reflexion von (A, x_ℓ) ist der extrem epi-Faktor der $R\ell$ -Reflexion von (A, x_ℓ) . Aus 2) und daraus, daß $\mathcal{A}$ balanciert ist, folgt, daß $r: (A, x_\ell) \longrightarrow (B, p_*(r)(x)_\ell)$ bereits ein extremer Epimorphismus ist. Es folgt 1).

2.4.5. Bemerkung: Die $I\ell$ -Reflexion $\mathcal{V}_{I\ell}: \mathcal{A}^D \longrightarrow I\ell$ ist costraff, bewahrt also finale Strukturen. Dies besagt aber keineswegs, daß $p_*(r)(x)_\ell = p_*(r)(x_\ell)$ ist, sondern lediglich, daß $p_*(r)(x)_\ell = p_*(r)(x_\ell)_\ell$ ist. Die finale Struktur in der topologischen Kategorie $I\ell = \mathcal{A}^{D_{I\ell}}$ ist nämlich gegeben durch

$$p_{I\mathcal{L}} \star (f)(y) = p_{\star}(f)(y)_{\mathcal{L}}.$$

2.4.6. Satz: In $\mathcal{A}$ sei jeder Epimorphismus bereits eine Retraktion. $\mathcal{L}$ sei eine epireflektive Unterkategorie von $\mathcal{A}^{\mathcal{P}}$ mit $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}$. Es ist $r^{I\mathcal{L}} \wedge \mathcal{L} = r^{\mathcal{L}} \cdot r^{I\mathcal{L}}$. Insbesondere ist $r^{R\mathcal{L}} = r^{Q\mathcal{L}} \cdot r^{I\mathcal{L}}$. Ist $r: (A, x) \longrightarrow (B, p_{\star}(r)(x))$ die $Q\mathcal{L}$ -Reflexion, so ist $r: (A, x) \longrightarrow (B, p_{\star}(r)(x_{\mathcal{L}}))$ die $R\mathcal{L}$ -Reflexion.

Beweis: Sei $r: (A, x) \longrightarrow (B, y)$ die $\mathcal{L}$ -Reflexion von (A, x) . Wir zeigen, daß mit $(A, x) \in I\mathcal{L}$ auch $(B, y) \in I\mathcal{L}$ ist. Wegen $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}$ ist $I\mathcal{L} \subset I\mathcal{L}$, also $(A, x) \in I\mathcal{L}$. Nach Satz 1.3.2. sind die Objekte aus $I\mathcal{L}$ dadurch charakterisiert, daß für sie die $\mathcal{L}$ -Reflexion initial ist. Folglich ist $x = p^{\star}(r)(y)$. Da $r: A \longrightarrow B$ ein Epimorphismus ist, gibt es einen Morphismus $s: B \longrightarrow A$ mit $r \cdot s = 1_B$. Also gilt $p^{\star}(s)(x) = p^{\star}(s)(p^{\star}(r)(y)) = p^{\star}(r \cdot s)(y) = p^{\star}(1_B)(y) = y$. Damit ist $s: (B, y) \longrightarrow (A, x)$ initial. Da $I\mathcal{L}$ abgeschlossen gegenüber initial-Unterobjekten ist, ist $(B, y) \in I\mathcal{L}$.

2.4.7. Bemerkung: Die Bedeutung des Satzes besteht vor allem darin, daß wir in speziellen Kategorien $\mathcal{A}^{\mathcal{P}}$ versuchen können, die epireflektive Unterkategorie $\mathcal{L}$ möglichst groß und auf diese Weise unabhängig von $\mathcal{L}$ zu wählen. Dann ist das Studium der Epireflexionen in die Unterkategorien der Form $I\mathcal{L} \wedge \mathcal{L}$ zurückgeführt auf das der $\mathcal{A}$ -iso-Reflexionen und der einen festen $\mathcal{L}$ -Reflexion. Gibt es unter allen epireflektiven, nicht $\mathcal{A}$ -iso-reflektiven Unterkategorien eine größte, so bietet sich diese für $\mathcal{L}$ an. In Kapitel III werden wir sehen, daß dieser einfache Fall vorliegt, falls $\mathcal{A}$ die Kategorie Ens der Mengen und Abbildungen ist.

5. P-Präreflexionen

Für die Konstruktion von Reflexionen sind die nachstehend definierten Präreflexionen ein wichtiges Hilfsmittel. Zu einer reflektiven Unterkategorie $\mathcal{L}$ läßt sich oft eine Familie von Morphismen angeben, die aber leider noch keine Reflexion, sondern lediglich eine Präreflexion für $\mathcal{L}$ bilden. In diesem Fall können wir durch transfinite Konstruktion zu einer Reflexion gelangen. Aus diesem Grund wurde die Bezeichnung "Präreflexion" gewählt.

2.5.1. Definition: $\mathcal{C}$ sei eine (I, P) -rechts-Bikategorie,

$\mathcal{L} \subset \mathcal{C}$, $s: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Funktor und $(s_X: X \rightarrow sX)_{X \in \mathcal{C}}$ eine natürliche Transformation $(s_X): 1_{\mathcal{C}} \rightarrow s$.

s sowie die Familie $(s_X)_{X \in \mathcal{C}}$ heißt eine P-Präreflexion für $\mathcal{L}$, wenn gilt:

- 1) s_X ist ein Isomorphismus genau dann, wenn $X \in \mathcal{L}$ ist.
- 2) s_X ist ein P-Morphismus für jedes Objekt X .

2.5.2. Bemerkungen: 1) Diese Definition stellt eine Verallgemeinerung des von Sharpe, Beattie und Marsden [18] definierten Begriffs des "quotient on Top" dar. Dieser stimmt mit den epi-Präreflexionen in der Kategorie der topologischen Räume überein.

2) Im Gegensatz zu einer Reflexion verlangen wir nicht, daß $sX \in \mathcal{L}$ ist. Eine Präreflexion ist genau dann eine Reflexion, wenn sie idempotent, d. h. $ssX = sX$, ist. Jeder Morphismus s_X einer P-Präreflexion hat nämlich die Eigenschaft:

Zu jedem Morphismus $f: X \rightarrow B$ mit $B \in \mathcal{L}$ gibt es genau einen Morphismus $\bar{f}: sX \rightarrow B$ mit $\bar{f} \cdot s_X = f$. Man nehme $\bar{f} = s_B^{-1} \cdot sf$.

Diese Eigenschaft besagt, daß s_X " $\mathcal{L}$ -cofibre" ist im Sinne von Wyler [20].

2.5.3. Definition: $\mathcal{C}$ heißt P-covollständig, wenn jedes Diagramm in $\mathcal{C}$, dessen Morphismen alle aus P sind, einen Colimes besitzt. Beispielsweise ist jede topologische Kategorie α^P α -iso-covollständig, selbst wenn sie nicht covollständig sein sollte.

2.5.4. Satz: $\mathcal{C}$ sei eine P-colokal kleine, P-covollständige (I, P) -rechts-Bikategorie, $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$. Gibt es zu $\mathcal{B}$ eine P-Präreflexion (s_X) , so ist $\mathcal{B}$ P-reflektiv in $\mathcal{C}$. Die $\mathcal{B}$ -Reflexion läßt sich durch transfinite Konstruktion aus (s_X) erhalten.

Beweis: Zunächst sei bemerkt: Mit Hilfe der (I, P) -Diagonalbedingung und der universellen Eigenschaft des Colimes läßt sich zeigen: Ist $(I, \leq)$ eine linear geordnete Menge, $D: (I, \leq) \rightarrow \mathcal{C}$ ein Diagramm in $\mathcal{C}$, so daß alle zugehörigen Morphismen aus P sind, und $(l_i: D(i) \rightarrow L)$ der Colimes von D, so ist auch jedes l_i ein P-Morphismus.

Mit α, β, γ bezeichnen wir Ordinalzahlen, mit O_β die wohlgeordnete Menge aller Ordinalzahlen, die kleiner als β sind. Durch transfinite Konstruktion definieren wir für jede Ordinalzahl β eine P-Präreflexion $s_\beta: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, $(s_{\beta X})_{X \in \mathcal{C}}$: $1_{\mathcal{C}} \rightarrow s_\beta$ für $\mathcal{B}$ und ein Diagramm $s_{\beta X}: O_{\beta+1} \rightarrow \mathcal{C}$, dessen Morphismen alle aus P sind.

$\beta=0$: $s_\beta X := X$, $s_\beta f := f$, $s_{\beta X} := 1_X$, $s_{\beta X} \alpha := X$, $s_{\beta X}(\alpha_1, \alpha_2) := 1_X$ für $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 < 1$.

$\beta > 0$: Seien s_α , $(s_{\alpha X})$, $s_{\alpha X}$ bereits für alle $\alpha < \beta$ definiert. Definiere ein Diagramm $s'_{\beta X}: O_\beta \rightarrow \mathcal{C}$ durch $s'_{\beta X} \alpha := s_\alpha X$, $s'_{\beta X}(\alpha_1, \alpha_2) := s_{\alpha_2 X}(\alpha_1, \alpha_2)$ für $\alpha_1 \leq \alpha_2 < \beta$. Da $\mathcal{C}$ P-covollständig ist, existiert der Colimes $(l_{\alpha X}: s_{\alpha X} \rightarrow L)$ des Diagramms $s'_{\beta X}$. Setze $s_\beta X := sL$. Für $f: X \rightarrow Y$ bildet die Familie $(s_\alpha f)_{\alpha \in O_\beta}$

eine natürliche Transformation $(s_\alpha f): S'_{BX} \longrightarrow S'_{BY} \cdot f_B$. Sei s_B der zugehörige Morphismus zwischen den Colimiten. Wir setzen $s_B f := s_B f_B: s_B X \longrightarrow s_B Y$. Damit ist ein Funktor $s_B: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ definiert. Durch $s_{BX} := s_L \cdot l_{OX}$ ist eine natürliche Transformation $(s_{BX}): 1_{\mathcal{C}} \longrightarrow s_B$ gegeben, die eine P-Präreflexion für $\mathcal{L}$ ist. Definiere ein Diagramm $S_{BX}: O_{B+1} \longrightarrow \mathcal{C}$ von P-Morphismen durch $S_{BX} \alpha := s_\alpha X$ für $\alpha \in O_{B+1}$ und

$$S_{BX}(\alpha_1, \alpha_2) := \begin{cases} S_{\alpha_2}(\alpha_1, \alpha_2) & \text{für } \alpha_1 \leq \alpha_2 < B \\ s_L \cdot l_{\alpha_1 X} & \text{für } \alpha_1 < \alpha_2 = B \\ 1_{s_L} & \text{für } \alpha_1 = \alpha_2 = B \end{cases} .$$

Da $\mathcal{C}$ P-colokal klein ist, gibt es zu X eine repräsentative Menge $\{f_i: X \longrightarrow Y_i\}$ von P-Morphismen. Zu jedem Morphismus s_{BX} gibt es einen ihn repräsentierenden Morphismus $f_{i(B)}$. Sei γ eine Ordinalzahl mit einer Mächtigkeit größer als die der Menge $\{f_i: X \longrightarrow Y_i\}$. Da die Menge O_γ die Mächtigkeit von γ hat, ist die Abbildung $O_\gamma \longrightarrow \{f_i: X \longrightarrow Y_i\}$, $B \mapsto f_{i(B)}$, nicht injektiv. Also gibt es $B_1 = B_1(X)$, $B_2 = B_2(X)$ mit $B_1 < B_2$ und $f_{i(B_1)} = f_{i(B_2)}$. Dann ist $s_{B_1 X} = s_{B_2 X} \cdot h$ mit einem Isomorphismus h . Mit transfiniter Induktion läßt sich zeigen, daß auch für alle $B \geq B_1$ $s_{B_1 X}$ und s_{BX} bis auf Isomorphie gleich sind. Insbesondere ist wegen $s_{B_1+1 X} = s_{s_{B_1 X}} \cdot s_{B_1 X}$ auch $s_{s_{B_1 X}}$ ein Isomorphismus, also $s_{B_1 X} \in \mathcal{L}$. Setze $rX := s_{B_1 X}$, $r_X := s_{B_1 X} \cdot (r_X)$ ist dann eine P-Präreflexion für $\mathcal{L}$ mit $rX \in \mathcal{L}$ und folglich eine P-Reflexion für $\mathcal{L}$.

2.5.5. Beispiel: α -iso-Präreflexionen

Sei α^p eine topologische Kategorie über α . Jede α -iso-Reflexion γ ist durch ihre Strukturabbildungen

$(\psi_A: p^* A \longrightarrow p^* A)_{A \in \alpha}$ bestimmt. Analog gehört zu jeder

α -iso-Präreflexion X eine Familie von Strukturabbildungen

$(\kappa_A: p^*A \longrightarrow p^*A)_{A \in \mathcal{A}}$. Der folgende Satz charakterisiert die zu $\mathcal{A}$ -iso-Präreflexionen gehörigen Familien von Strukturabbildungen. Der Beweis des Satzes bereitet keine Schwierigkeiten mehr.

2.5.6. Satz: $(\kappa_A: p^*A \longrightarrow p^*A)_{A \in \mathcal{A}}$ ist genau dann die Familie der Strukturmorphismen einer $\mathcal{A}$ -iso-Präreflexion X , wenn gilt:

- 1) $x \leq \kappa_A x$
- 2) $x_1 \leq x_2 \Rightarrow \kappa_A x_1 \leq \kappa_A x_2$
- 3) $\kappa_A p^*(f)(y) \leq p^*(f)(\kappa_B y)$ für $f: A \longrightarrow B$
 (κ_A) ist genau dann eine $\mathcal{A}$ -iso-Reflexion, wenn außerdem gilt:

- 4) $\kappa_A \kappa_A x = \kappa_A x$

Zu jeder $\mathcal{A}$ -iso-Präreflexion (κ_A) gibt es genau eine $\mathcal{A}$ -iso-Reflexion (ψ_A) , so daß für die zugehörige $\mathcal{A}$ -iso-reflektive Unterkategorie $\mathcal{L}$ gilt: $(A, x) \in \mathcal{L} \Leftrightarrow \kappa_A x = x$. Die nach dem Beweis des Satzes 2.5.4. existierenden $\mathcal{A}$ -iso-Präreflexionen X_β sind gegeben durch $\kappa_{0A} x = x$, $\kappa_{\beta A} x = \kappa_A^{\sup_{\alpha < \beta} \kappa_\alpha} x$ für $\beta > 0$.

2.5.7. Bemerkung: $\mathcal{A}$ -iso-Präreflexionen kommen in der Literatur des öfteren vor. So wird von Cech [1] die Reflexion von den Hüllenräumen in die topologischen Räume, von Thomas [19] die Reflexion von den topologischen Räumen in die T_3 -Räume durch transfinite Konstruktion aus einer Ens-iso-Präreflexion gewonnen. Der Satz 2.5.4. zeigt, daß die transfinite Konstruktion nicht nur auf $\mathcal{A}$ -iso-Präreflexionen, sondern insbesondere auch auf extrem epi-Präreflexionen anwendbar ist. Beispiele hierfür bringen wir in den beiden folgenden Kapiteln.

Kapitel III : Rechts-Bikategoriestrukturen in topologischen Kategorien über der Kategorie Ens der Mengen

1. Allgemeines, Beispiele

Jede topologische Kategorie $\text{Ens}^{\mathcal{P}}$ ist colokal klein, vollständig, covollständig, eine (extrem mono, epi)-, (mono, extrem epi)- und eine (initial, Ens-iso)-rechts-Bikategorie.

3.1.1. Lemma: M_1 sei eine einelementige Menge. Es sind äquivalent:

- 1) p^*M_1 ist der einelementige Verband.
- 2) Jede konstante Abbildung ist stetig.

Beweis: 1) $\Rightarrow$ 2): 2) ist äquivalent damit, daß für jede konstante Abbildung $f: A \longrightarrow B$ und jede Struktur $y \in p^*B$ gilt $p^*(f)(y) = \omega_A$. Es gibt eine Faktorisierung $f = h \circ g$, $g: A \longrightarrow M_1$, $h: M_1 \longrightarrow B$. Es ist $p^*(f)(y) = p^*(g)(p^*(h)(y)) = p^*(g)(\omega_{M_1}) = \omega_A$.
2) $\Rightarrow$ 1): Für alle Strukturen $x \in p^*M_1$ ist nach 2) die Abbildung $1_{M_1}: (M_1, \omega_{M_1}) \longrightarrow (M_1, x)$ stetig. Dann ist $x = \omega_{M_1}$.

Sind in $\text{Ens}^{\mathcal{P}}$ die Aussagen des Lemmas erfüllt, so auch in jeder topologischen Unterkategorie von $\text{Ens}^{\mathcal{P}}$. An eine topologische Kategorie $\text{Ens}^{\mathcal{P}}$ stellen wir die zusätzliche Forderung, daß p^*M_1 der einelementige Verband ist. Mit $\mathcal{P}^{\mathcal{P}}$ bezeichnen wir die Unterkategorie der höchstens einpunktigen Räume. $\mathcal{P}^{\mathcal{P}}$ ist das kleinste Element im "Verband" der epireflektiven Unterkategorien von $\text{Ens}^{\mathcal{P}}$.

Für Anwendungen beschränken wir uns auf die folgenden fünf bekannten topologischen Kategorien, in denen wir die Unterkategorie der T_0 -Räume hervorheben.

1) Die topologischen Räume Ens^t

Für eine Menge X sei t^*X der Verband aller Topologien $\mathcal{T}$ auf X ($\mathcal{T}$ System der offenen Mengen) mit der Ordnungsrelation $\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}_2 : \Leftrightarrow \mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$. Für $f: X \rightarrow Y$, $\mathcal{U} \in t^*Y$ sei $t^*(f)(\mathcal{U}) := \{f^{-1}[O] / O \in \mathcal{U}\}$. $(X, \mathcal{T})$ heißt ein T_0^t -Raum, wenn von je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in X$ mindestens einer in einer offenen Menge enthalten ist, in der der andere nicht liegt. Die T_0^t -Reflexion von $(X, \mathcal{T})$ erhält man durch Bildung des Quotientenraums nach der Äquivalenzrelation $x \sim y \Leftrightarrow \overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$, wobei $\overline{\{x\}}$ die abgeschlossene Hülle von $\{x\}$ ist.

2) Die uniformen Räume Ens^u ([17])

Für eine Menge X sei u^*X der Verband aller uniformen Strukturen $\mathcal{U}$ auf X mit der Ordnungsrelation $\mathcal{U}_1 \leq \mathcal{U}_2 : \Leftrightarrow \mathcal{U}_2 \subset \mathcal{U}_1$. Für $f: X \rightarrow Y$, $\mathcal{W} \in u^*Y$ sei $u^*(f)(\mathcal{W}) := (fxf)^{-1}(\mathcal{W}) := \{U / \text{Es gibt } V \in \mathcal{W} \text{ mit } (fxf)^{-1}[V] \subset U\}$. $(X, \mathcal{U})$ heißt ein T_0^u -Raum, wenn $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U = \Delta_X$ die Diagonale ist. Die T_0^u -Reflexion von $(X, \mathcal{U})$ erhält man durch Bildung des Quotientenraums nach der Äquivalenzrelation $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$.

3) Die Limesräume Ens^l ([15])

Für eine Menge E sei l^*E der Verband aller Limesstrukturen q auf E mit der Ordnungsrelation $q_1 \leq q_2 : \Leftrightarrow q_1 \subset q_2$. Für $f: E_1 \rightarrow E_2$, $q_2 \in l^*E_2$ sei $l^*(f)(q_2) := \{(f, x) / (f(f), f(x)) \in q_2\}$. (E, q) heißt ein T_0^l -Raum, wenn gilt: $(\dot{x}, y) \in q$ und $(\dot{y}, x) \in q \Rightarrow x = y$. Hierbei sei $\dot{x}$ der von der Menge $\{x\}$ erzeugte Hauptfilter.

4) Die uniformen Limesräume Ens^{ul} ([21])

Für eine Menge E sei ul^*E der Verband aller uniformen Limesstrukturen J auf E mit der Ordnungsrelation $J_1 \leq J_2 : \Leftrightarrow$

$J_1 \subset J_2$. Für $f: E_1 \longrightarrow E_2$, $J_2 \in \text{ul}^* E_2$ sei $\text{ul}^*(f)(J_2) := \{ \mathcal{U} / (fxf)(\mathcal{U}) \in J_2 \}$. (E, J) heißt ein T_0^{ul} -Raum, wenn gilt:

$$\dot{x} \times \dot{y} \in J \Rightarrow x=y.$$

5) Die Kategorie Ens^T der reflexiven Relationen ([22])

Für eine Menge A sei r^*A der Verband aller Teilmengen von $A \times A$, die die Diagonale enthalten. Die Ordnungsrelation sei die Inklusion. Für $f: A \longrightarrow B$, $\tau \in r^*B$ sei $r^*(f)(\tau) :=$

$$(fxf)^{-1}[\tau]. (A, \mathfrak{s}) \text{ heißt ein } T_0^T\text{-Raum, wenn gilt:}$$

$$(a_1, a_2) \in \mathfrak{s} \text{ und } (a_2, a_1) \in \mathfrak{s} \Rightarrow a_1 = a_2.$$

2. Extrem epi-Präreflexionen in Ens^D

Ramaley und Wyler weisen darauf hin, daß sich die von ihnen in [16, Abschnitt 3] für die Kategorie der Cauchy-Räume gewonnenen Sätze unter Benutzung der in [20] behandelten Punkt-Separatoren auf beliebige topologische Kategorien Ens^D verallgemeinern lassen, führen dies aber in [16] und [20] nicht weiter aus. Im folgenden führen wir derartige Verallgemeinerungen durch. Die dadurch erzielten Ergebnisse gestatten es dann, in Abschnitt 5 den wichtigen Satz über die Einfachheit topologischer Unterkategorien zu beweisen.

3.2.1. Definitionen und Sachverhalte aus [20]: Ein 1_{Ens} liftender Funktor $\phi: \text{Ens}^D \longrightarrow \text{Ens}^T$, $\phi(A, x) = (A, \varphi_A x)$, heißt Punkt-Separator. Die Unterkategorie $K(\phi) := \{ (A, x) / \varphi_A x = \Delta_A \}$ ist abgeschlossen gegenüber mono-Unterobjekten und Produkten, also extrem epi-reflektiv in Ens^D . Ein Punkt-Separator ϕ heißt feiner als ein Punkt-Separator ϕ' , $\phi \leq \phi'$, falls $\varphi_A x \subset \varphi'_A x$ für alle $(A, x) \in \text{Ens}^D$ ist. ϕ heißt grob, falls aus $K(\phi) \subset K(\phi')$ immer $\phi' \leq \phi$ folgt. Theorem 8.2. von Wyler läßt sich so interpretieren, daß die groben Punkt-Separatoren

in bijektiver Beziehung zu den extrem epi-Reflexionen stehen, wobei die Bijektionen gegeben sind durch

$$\begin{aligned}\phi &\longmapsto (s_{(A,x)}: (A,x) \longrightarrow (A/\varphi_{A^x, P_{\#}(s_{(A,x)})(x))) \\ (s_{(A,x)}) &\longmapsto \phi \text{ mit } \varphi_{A^x} = r^*(s_{(A,x)})(\Delta_B), \text{ wobei} \\ &\quad s_{(A,x)}: (A,x) \longrightarrow (B,y)\end{aligned}$$

ϕ heißt streng, falls alle Relationen φ_A Äquivalenzrelationen sind. Jeder grobe Punkt-Separator ist streng. Zu jedem strengen Punkt-Separator ϕ gibt es genau einen groben Punkt-Separator ϕ' mit $K(\phi) = K(\phi')$. Die vorstehend angegebenen Bijektionen liefern eine bijektive Beziehung zwischen den strengen Punkt-Separatoren und den extrem epi-Präreflexionen.

Über die Kategorie Ens^r benötigen wir die folgenden Aussagen: Die Räume (A, ϱ) mit einer symmetrischen Relation ϱ , $\varrho = \varrho^{-1}$, bilden eine topologische Unterkategorie Ens^{sr} . Die Reflexion $\gamma^{sr}: \text{Ens}^r \longrightarrow \text{Ens}^{sr}$ ist $1_A: (A, \varrho) \longrightarrow (A, \varrho^{sr})$ mit $\varrho^{sr} = \varrho \circ \varrho^{-1}$. Die Räume (A, ϱ) mit einer transitiven Relation ϱ , $\varrho \circ \varrho \subset \varrho$, bilden eine topologische Unterkategorie Ens^{tr} . Die Reflexion $\gamma^{tr}: \text{Ens}^r \longrightarrow \text{Ens}^{tr}$ ist $1_A: (A, \varrho) \longrightarrow (A, \varrho^{tr})$ mit $\varrho^{tr} = \{(x,y) / \text{Es gibt } x=x_0, x_1, \dots, x_n=y \text{ mit } x_i \varrho x_{i+1}\}$. Die Räume (A, ϱ) mit einer Äquivalenzrelation ϱ bilden eine topologische Unterkategorie $\text{Ens}^{är}$. Es ist $\text{Ens}^{är} = \text{Ens}^{sr} \cap \text{Ens}^{tr}$. Die Reflexion $\gamma^{är}: \text{Ens}^r \longrightarrow \text{Ens}^{är}$ ist das Kompositum $\gamma^{är} = \gamma^{tr} \circ \gamma^{sr}$, d. h. $1_A: (A, \varrho) \longrightarrow (A, \varrho^{är})$ mit $\varrho^{är} = \{(x,y) / \text{Es gibt } x=x_0, x_1, \dots, x_n=y \text{ mit } (x_i \varrho x_{i+1} \text{ oder } x_{i+1} \varrho x_i)\}$.

Indem man einen Punkt-Separator ϕ "punktweise" nach $\text{Ens}^{är}$ reflektiert, erhält man einen strengen Punkt-Separator $\phi^{är}$ mit $\phi \leq \phi^{är}$ und $K(\phi) = K(\phi^{är})$. Da man nach Satz 2.5.4. durch transfinite Konstruktion von einer extrem epi-Präreflexion zu einer extrem epi-Reflexion gelangt, erhält man die zu

einem Punkt-Separator Φ gehörige extrem epi-Reflexion nach $K(\Phi)$ durch Ausführen der folgenden drei Prozesse

- 1) Bilden von $\Phi^{\text{är}}$
- 2) Bilden der extrem epi-Präreflexion zu $\Phi^{\text{är}}$
- 3) Transfinite Konstruktion

Ist ein Punkt-Separator durch innere Eigenschaften des Raumes gegeben, was oft der Fall ist, so erhält man auf diese Weise eine innere Charakterisierung der $K(\Phi)$ -Reflexion. Wir benutzen das Verfahren, um im nächsten Abschnitt die Reflexion in die T_0^P -Räume zu konstruieren.

Ist $\mathcal{L}$ eine extrem epi-reflektive Unterkategorie von Ens^P , so sind die Räume aus $I\mathcal{L}$ dadurch charakterisiert, daß für sie die $\mathcal{L}$ -Reflexion initial ist. In den meisten Fällen ist die $\mathcal{L}$ -Reflexion nicht unmittelbar gegeben, sondern es ist lediglich eine extrem epi-Präreflexion für $\mathcal{L}$ bekannt. Der folgende Satz zeigt, daß die Räume aus $I\mathcal{L}$ bereits dadurch bestimmt sind, daß für sie die extrem epi-Präreflexion initial ist.

3.2.2. Satz: Sei $(s_{(A,x)}: (A,x) \longrightarrow s(A,x))$ eine extrem epi-Präreflexion für $\mathcal{L}$. Es sind äquivalent:

- 1) $(A,x) \in I\mathcal{L}$
- 2) $s_{(A,x)}$ ist ein initialer Morphismus.
Für $(A,x) \in I\mathcal{L}$ ist
 - a) $s_{(A,x)}$ die $\mathcal{L}$ -Reflexion,
 - b) der nach $\mathcal{L}$ -reflektierte Raum $(A,x)_{\mathcal{L}}$ ein extrem mono-Unterobjekt von (A,x) .

Beweis: $1) \Rightarrow 2)$: Die $\mathcal{L}$ -Reflexion $r: (A,x) \longrightarrow (A,x)_{\mathcal{L}}$ ist initial. Da $s_{(A,x)}$ eine Präreflexion für $\mathcal{L}$ ist, gibt es ein $\bar{r}: s(A,x) \longrightarrow (A,x)_{\mathcal{L}}$ mit $\bar{r} \cdot s = r$. Mit r ist dann auch s initial.

2) $\Rightarrow$ 1): Sei $(B, y) := s(A, x)$. Es gibt $s': B \rightarrow A$ mit $s \circ s' = 1_B$. Wegen 2) ist $p^*(s')(x) = p^*(s')(p^*(s)(y)) = p^*(s \circ s')(y) = y$. Also ist $s': (B, y) \rightarrow (A, x)$ stetig. Durch Anwendung des Präflexionsfunktors s erhält man das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (B, y) & \xrightarrow{s'} & (A, x) \\ \downarrow s'' & & \downarrow s \\ s(B, y) & \xrightarrow{s'''} & (B, y) \end{array} \quad \text{mit } s'' := s_{(B, y)} \text{ und } s''' := s(s').$$

Da $s''' \circ s'' = s \circ s' = 1_B$ und s'' ein extremer Epimorphismus ist, ist s'' ein Isomorphismus in Ens^P . Da s eine Präreflexion für $\mathcal{L}$ ist, ist dann $(B, y) \in \mathcal{L}$. Da nach Voraussetzung $s_{(A, x)}$ initial ist, folgt $(A, x) \in I\mathcal{L}$.

Insbesondere sind damit auch a) und b) bewiesen.

Aus dem vorhergehenden Satz, Satz 2.5.4. und unter Benutzung der (initial, Ens-iso)-Diagonalbedingung folgt der Satz:

3.2.3. Satz: $1_A: (A, x) \rightarrow (A, \chi_A x)$ mit $\chi_A x :=$

$p^*(s_{(A, x)})(p_*(s_{(A, x)})(x))$ ist eine Ens-iso-Präreflexion für $I\mathcal{L}$. Die $I\mathcal{L}$ -Reflexion läßt sich durch transfinite Konstruktion erhalten.

Da die $I\mathcal{L}$ -Reflexion der Ens-iso-Faktor der $\mathcal{L}$ -Reflexion ist, gilt: Ist $s_{(A, x)}: (A, x) \rightarrow s(A, x)$ die $\mathcal{L}$ -Reflexion von (A, x) , so ist $1_A: (A, x) \rightarrow (A, \chi_A x)$ die $I\mathcal{L}$ -Reflexion von (A, x) .

Über das umgekehrte Problem läßt sich sagen:

3.2.4. Satz: Ist $1_A: (A, x) \rightarrow (A, \chi_A x)$ die $I\mathcal{L}$ -Reflexion von (A, x) , so ist $s_{(A, x)}^2 := s_{s(A, x)} \circ s_{(A, x)}: (A, x) \rightarrow ss(A, x)$ die $\mathcal{L}$ -Reflexion von (A, x) .

Beweis: Sei $(B, y) := s(A, x)$ und s' so gewählt, daß $s \circ s' = 1_B$ ist.

Da $p^*(s')(\chi_A x) = p^*(s')(p^*(s)(y)) = y$ ist, ist $s': (B, y) \rightarrow (A, \chi_A x)$

initial. Da nach Voraussetzung $(A, \chi_A x) \in I\mathcal{L}$ ist, ist dann auch $(B, y) \in I\mathcal{L}$. Nach Satz 3.2.2. a) ist $s(B, y) \in \mathcal{L}$ und folglich $s(B, y)^* s(A, x): (A, x) \longrightarrow s(B, y)$ die $\mathcal{L}$ -Reflexion von (A, x) .

Beispiele: Wir benutzen Satz 3.2.2., um in den Kategorien Ens^t , Ens^l , Ens^u und Ens^{ul} die Ens-iso-reflektiven Hüllen extrem epi-reflektiver Unterkategorien zu charakterisieren. Die extrem epi-Präreflexion s und der strenge Punkt-Separator $\tilde{\varphi}$ seien einander zugeordnet, $\mathcal{L} = K(\tilde{\varphi})$.

1) Extrem epi-Präreflexionen in Ens^t

$(X, \mathcal{X})$ sei ein topologischer Raum. Man überzeugt sich leicht, daß die Struktur $\mathcal{X}^{\tilde{\varphi}} := t^*(s_{(X, \mathcal{X})})(t_*(s_{(X, \mathcal{X})})(\mathcal{X}))$ gegeben ist durch

$$\mathcal{X}^{\tilde{\varphi}} = \left\{ 0 / \begin{array}{l} 0 \in \mathcal{X}, \text{ und } 0 \text{ ist Vereinigung} \\ \text{von } \varphi_X \mathcal{X} \text{-Äquivalenzklassen.} \end{array} \right\}$$

Aus Satz 3.2.3. folgt der Satz:

3.2.5. Satz: $\gamma_X: (X, \mathcal{X}) \longrightarrow (X, \mathcal{X}^{\tilde{\varphi}})$ ist eine Ens-iso-Präreflexion für die $I\mathcal{L}$ -Räume. Insbesondere sind äquivalent:

- 1) $(X, \mathcal{X}) \in I\mathcal{L}$
- 2) Jede offene Menge ist Vereinigung von $\varphi_X \mathcal{X}$ -Äquivalenzklassen.

Beispiele betrachten wir in Kapitel IV.

2) Extrem epi-Präreflexionen in Ens^l

Sei (E, q) ein Limesraum. $x^{\tilde{\varphi}}$ bezeichne die $\varphi_{E,q}$ -Äquivalenzklasse von $x \in E$. Für $F \subseteq E$ sei $F^{\tilde{\varphi}} := s^{-1}[s[F]] = \bigcup_{x \in F} x^{\tilde{\varphi}}$. Für einen Filter $\mathcal{F}$ auf E sei $\mathcal{F}^{\tilde{\varphi}}$ der von dem Mengensystem

$\{F^{\tilde{\varphi}} / F \in \mathcal{F}\}$ erzeugte Filter, also $\mathcal{F}^{\tilde{\varphi}} = s^{-1}(s(\mathcal{F}))$. Gilt

$\mathcal{F} q y$ für alle y aus einer Menge $M \subseteq E$, so schreiben wir auch $\mathcal{F} q M$. $q^{\tilde{\varphi}}$ sei die von den Konvergenzen $(\mathcal{F}^{\tilde{\varphi}}, x^{\tilde{\varphi}})$ mit $(\mathcal{F}, x) \in q$ erzeugte Limesstruktur, d. h.

$$q^\Phi = \left\{ (f, x) / \begin{array}{l} \text{Es gibt } (f_1, x_1), \dots, (f_n, x_n) \in q \text{ mit} \\ x_1 \in x^\Phi \text{ und } f \leq (f_1 \vee \dots \vee f_n)^\Phi. \end{array} \right\}$$

Hierbei sei $f_1 \vee \dots \vee f_n$ der feinste Filter, der größer als die Filter f_1 ist. Man rechnet leicht nach, daß $q^\Phi = 1^*(s)(1_*(s)(q))$ ist. Also gilt der Satz:

3.2.6. Satz: $1_E: (E, q) \longrightarrow (E, q^\Phi)$ ist eine Ens-iso-Präreflexion für die $I\mathcal{L}$ -Räume. Insbesondere sind äquivalent:

- 1) $(E, q) \in I\mathcal{L}$
- 2) (E, q) genügt dem Axiom: $f q x \Rightarrow f^\Phi q x^\Phi$
Ist P ein Punkt-Separator mit $P \text{ Ens}^1 \subset \text{Ens}^{\text{sr}}$ und $P^{\text{är}} = \Phi$, so sind 1) und 2) auch äquivalent zu
- 3) (E, q) genügt dem Axiom: $f q x$ und $(x, y) \in \mathcal{Q}_E q \Rightarrow f^\Phi q y$

Wir definieren zwei weitere Unterkategorien $\Phi_1\mathcal{L}$ und $\Phi_2\mathcal{L}$ als die Klassen aller Räume (E, q) , die die folgenden Axiome erfüllen:

$$\Phi_1\mathcal{L}: f q x \Rightarrow f^\Phi q x$$

$$\Phi_2\mathcal{L}: f q x \Rightarrow f q x^\Phi$$

Es ist $I\mathcal{L} = \Phi_1\mathcal{L} \cap \Phi_2\mathcal{L}$. Da mit $f: (E, q) \longrightarrow (E', q')$ auch $f: (E, \varphi_E q) \longrightarrow (E', \varphi_{E'} q')$ stetig ist, ist $f(x^\Phi) \subset f(x)^\Phi$, $f[F^\Phi] \subset f[F]^\Phi$, $f(f^\Phi) \leq f(f)^\Phi$. Hieraus folgt leicht, daß $\Phi_1\mathcal{L}$ und $\Phi_2\mathcal{L}$ abgeschlossen gegenüber initial-Objekten und folglich topologische Unterkategorien von Ens^1 sind.

Beispiele: Für $k=0,1,2$ sind die T_k -Räume (E, q) dadurch definiert, daß sie den folgenden Axiomen genügen:

$$T_0: \dot{x} q y \text{ und } \dot{y} q x \Rightarrow x=y$$

$$T_1: \dot{x} q y \Rightarrow x=y$$

$$T_2: f q x \text{ und } f q y \Rightarrow x=y$$

Die symmetrischen Relationen $\mathcal{Q}_E^0 q := \{(x, y) / \dot{x} q y \text{ und } \dot{y} q x\}$,

$s_{E^q}^1 := \{(x, y) / \dot{x} \ q \ y \text{ oder } \dot{y} \ q \ x\}$ und $s_{E^q}^2 := \{(x, y) / \text{Es gibt } f \text{ mit } f \ q \ x \text{ und } f \ q \ y\}$ definieren Punkt-Separatoren $P^k: \text{Ens}^1 \longrightarrow \text{Ens}^r$ für die T_k -Räume. Es sei $\Pi^k := P^{\text{kär}}$, d. h. $\pi_{E^q}^k := \{(x, y) / \text{Es gibt } x = x_1, \dots, x_n = y \text{ mit } (x_i, x_{i+1}) \in s_{E^q}^k\}$.

Es folgt der Satz:

3.2.7. Satz: 1) Die T_k -Reflexion läßt sich durch transfinite Konstruktion aus der zu Π^k gehörigen extrem epi-Präreflexion erhalten.

2) (E, q) ist ein IT_k -Raum genau dann, wenn er dem folgenden Axiom genügt:

$$IT_0: f \ q \ x \text{ und } \dot{x} \ q \ y \text{ und } \dot{y} \ q \ x \Rightarrow f^{\Pi^0} \ q \ y$$

$$IT_1: f \ q \ x \text{ und } \dot{y} \ q \ x \Rightarrow f^{\Pi^1} \ q \ y$$

$$IT_2: f \ q \ x \text{ und } q \ q \ x \text{ und } q \ q \ y \Rightarrow f^{\Pi^2} \ q \ y$$

Für IT_1 erhält man zunächst: $f \ q \ x$ und $(\dot{y} \ q \ x \text{ oder } \dot{x} \ q \ y) \Rightarrow f^{\Pi^1} \ q \ y$. Dieses Axiom ist aber äquivalent zu: $f \ q \ x$ und $\dot{y} \ q \ x \Rightarrow f^{\Pi^1} \ q \ y$. Genügt nämlich ein Raum (E, q) diesem Axiom, so gilt insbesondere, daß aus $\dot{x} \ q \ y$ die Beziehung $\dot{y} \ q \ x$ folgt. Die topologischen Unterkategorien $\Pi_1^k T_k$ und $\Pi_2^k T_k$ sind durch die folgenden Axiome charakterisiert:

$$\Pi_1^0 T_0: f \ q \ x \Rightarrow f^{\Pi^0} \ q \ x$$

$$\Pi_2^0 T_0: f \ q \ x \text{ und } \dot{x} \ q \ y \text{ und } \dot{y} \ q \ x \Rightarrow f \ q \ y$$

$$\Pi_1^1 T_1: f \ q \ x \Rightarrow f^{\Pi^1} \ q \ x$$

$$\Pi_2^1 T_1: f \ q \ x \text{ und } \dot{y} \ q \ x \Rightarrow f \ q \ y$$

$$\Pi_1^2 T_2: f \ q \ x \Rightarrow f^{\Pi^2} \ q \ x$$

$$\Pi_2^2 T_2: f \ q \ x \text{ und } q \ q \ x \text{ und } q \ q \ y \Rightarrow f \ q \ y$$

Ein Vergleich mit den von Ramaley und Wyler in [15] angegebenen Axiomen zeigt, daß das $\Pi_2^1 T_1$ -Axiom mit dem S_0 -Axiom und das $\Pi_2^2 T_2$ -Axiom mit dem S_1 -Axiom übereinstimmt. Deshalb

bezeichnen wir das $\Pi_2^0 T_0$ -Axiom auch mit S_{-1} .

3.2.8. Satz: Für $k=0,1,2$ ist

$$1) S_{k-1} \cap IT_0 = IT_k$$

$$2) S_{k-1} \neq IT_k$$

Beweis: 1) Der Fall $k=0$ ist trivial. Zu $k=1$ sei bemerkt, daß für einen S_0 -Raum (E,q) nach Ramaley und Wyler [15] bereits $\varepsilon = \{(x,y) / \dot{x} q y\}$ eine Äquivalenzrelation ist. Daher ist dann $\pi_E^0 q = \varepsilon_E^0 q = \varepsilon_E^1 q = \pi_E^1 q$ und $f^{\pi^0} = f^{\pi^1}$. Sei $k=2$. Für einen S_1 -Raum (E,q) gilt nicht nur $\varepsilon_E^0 q \subset \varepsilon_E^2 q$, sondern sogar $\varepsilon_E^0 q = \varepsilon_E^2 q$, denn sei $(x,y) \in \varepsilon_E^2 q$. Es gibt einen Filter f mit $f q x$ und $f q y$. Da außerdem $\dot{x} q x$ und $\dot{y} q y$ gilt, ist $\dot{x} q y$ und $\dot{y} q x$ nach dem S_1 -Axiom. Es folgt $\pi_E^0 q = \pi_E^2 q$, $f^{\pi^0} = f^{\pi^2}$.

2) Es genügt, einen Limesraum (E,q) anzugeben mit $(E,q) \in S_1$ und $(E,q) \notin IT_0$. Für einen uniformen Limesraum (E,J) ist $\varepsilon = \{(x,y) / \dot{x} x \dot{y} \in J\}$ eine Äquivalenzrelation auf E . Wyler hat in [21] einen Raum (E,J) angegeben, "in dem die Sättigung die Beziehung $x \varepsilon y$ verändert". Wir setzen die Konstruktion von (E,J) und die damit zusammenhängenden Bezeichnungen als bekannt voraus. Sei $(E,q) := \phi(E,J)$, wobei $\phi: \text{Ens}^{\text{ul}} \rightarrow \text{Ens}^1$ der bekannte topologische Funktor ist, definiert durch $\varphi_E J := \{(f,x) / f x \dot{x} \in J\}$. Da jeder limes-uniformisierbare Raum ein S_1 -Raum ist, ist $(E,q) \in S_1$.

Annahme: $(E,q) \in IT_0$. Nach Satz 3.2.2. ist dann bereits $s_{(E,q)}^0: (E,q) \rightarrow (E/\pi_E^0 q, l_*(s^0)(q))$ die T_0 -Reflexion, also $(E/\pi_E^0 q, l_*(s^0)(q)) \in T_0$. Es ist $\varepsilon_E^0 q = \{(x,y) / \dot{x} q y \text{ und } \dot{y} q x\} = \{(x,y) / \dot{x} x \dot{y} \in J\} = \varepsilon$. Nach Wyler besitzt die Äquivalenzrelation ε genau zwei Äquivalenzklassen, und zwar E' und E'' . Also ist $\varepsilon_E^0 q = \pi_E^0 q$ und $E/\pi_E^0 q = \{E', E''\}$. Sei $q' := l_*(s^0)(q)$ und $x \in E'$ fest gewählt. Der Filter $\varphi\{x\}$ konvergiert gegen x , da

$\varphi\{x\}x \dot{x} \leq \varphi\{x\}x \varphi\{x\} \in J$ ist. Aus der Stetigkeit von $s^0: (E, q) \longrightarrow (\{E', E''\}, q')$ folgt $s^0(\varphi\{x\}) q' s^0(x)$. Da jede Filtermenge von $\varphi\{x\}$ einen nichtleeren Durchschnitt mit E' und E'' hat, ist $s^0(\varphi\{x\}) = \dot{E}' \vee \dot{E}''$. Also gilt $\dot{E}' \vee \dot{E}'' q' E'$ und folglich $\dot{E}'' q' E'$. Analog folgt $\dot{E}' q' E''$. Dann ist aber $(E/\pi_{E, l_*}^0(s^0)(q))$ kein T_0 -Raum.

Nach Ramaley und Wyler [15] gilt:

- 1) Ein Limesraum ist genau dann ein S_1 -Raum, wenn er limes-uniformisierbar ist.
- 2) Ein Limesraum ist genau dann ein S_0 -Raum, wenn er durch einen Cauchy-Raum induziert wird.

Hieraus können wir die folgende Charakterisierung der IT_2 - und IT_1 -Räume herleiten:

3.2.9. Satz:

- 1) Ein Limesraum ist genau dann ein IT_2 -Raum, wenn er durch einen gesättigten uniformen Limesraum limes-uniformisierbar ist.
- 2) Ein Limesraum ist genau dann ein IT_1 -Raum, wenn er durch einen d-biregulären Cauchy-Raum induziert wird.

Beweis: 1) Sei $\Phi: \text{Ens}^{\text{ul}} \longrightarrow \text{Ens}^1$ der topologische Funktor mit $\varphi_E J := \{(f, x) / f x \dot{x} \in J\}$. Ein uniformer Limesraum (E, J) ist separiert genau dann, wenn $(E, \varphi_E J)$ ein T_2 -Raum ist. Dies ist äquivalent dazu, daß aus $\dot{x} x \dot{y} \in J$ folgt $x=y$. Nach der folgenden Betrachtung 4) über die uniformen Limesräume ist $\{ \text{separierte uniforme Limesräume} \} = \text{gesättigte uniforme Limesräume}$.

Zu $(E, q) \in IT_2$ gibt es einen initialen Morphismus $f: (E, q) \longrightarrow (E', q')$ in einen T_2 -Raum (E', q') . Da jeder T_2 -Raum

limes-uniformisierbar ist, gibt es (E', J') mit $\varphi_E, J' = q'$.
 Da $(E', q') \in T_2$ ist, ist (E', J') separiert und folglich
 $(E, \text{ul}^*(f)(J'))$ gesättigt. Es ist $\varphi_E \text{ul}^*(f)(J') = l^*(f)(\varphi_E, J') =$
 $l^*(f)(q') = q$. Zu (E, q) existiere ein gesättigter Raum (E, J)
 mit $q = \varphi_E J$. Es gibt eine initiale Abbildung $f: (E, J) \rightarrow (E', J')$
 in einen separierten Raum (E', J') . Dann ist $f: (E, q) \rightarrow$
 $\rightarrow (E', \varphi_E, J')$ eine initiale Abbildung in einen T_2 -Raum,
 also $(E, q) \in IT_2$.

2) Aus Lemma 3.9. von Ramaley und Wyler [16] folgt sofort,
 daß in der Kategorie der Cauchy-Räume gilt $IT_1 = d$ -bireguläre
 Räume. Da außerdem ein Cauchy-Raum nach Definition genau
 dann ein T_1 -Raum ist, wenn der zugehörige Limesraum ein
 T_1 -Raum ist, folgt 2) analog zu 1).

3) Extrem epi-Präreflexionen in Ens^u

Zur Charakterisierung von $I\&$ in Ens^u und Ens^{ul} benötigen
 wir noch den folgenden Satz:

3.2.10. Satz: Sei $\text{Ens}^{p'}$ eine topologische Unterkategorie von
 Ens^p , $f: A \rightarrow B$ eine surjektive Abbildung. Für $x \in p'^*A$
 sind äquivalent:

- 1) $x = p'^*(f)(p'_*(f)(x))$
- 2) $x = p^*(f)(p_*(f)(x))$

Beweis: Es ist $p'_*(f)(x) = p_*(f)(x)_{\text{Ens}^{p'}}$.

1) $\Rightarrow$ 2): $x = p'^*(f)(p'_*(f)(x)) = p^*(f)(p'_*(f)(x)) \geq p^*(f)(p_*(f)(x))$
 $\geq x$.

2) $\Rightarrow$ 1): Da $x \in p'^*A$ und f surjektiv ist, ist nach Proposition
 3.8. aus [16] $p_*(f)(x) \in p'^*B$. Folglich ist $p_*(f)(x) = p'_*(f)(x)$,
 so daß $x = p^*(f)(p_*(f)(x)) = p'^*(f)(p'_*(f)(x))$ ist.

Wir wählen eine möglichst einfache topologische Kategorie,

die Ens^u als topologische Unterkategorie enthält und in der sich die finale Struktur leicht berechnen läßt. Sei $\underline{F}(X \times X)$ die Menge der Filter auf $X \times X$, $\leq$ die Feinerrelation von Filtern, $[\Delta_X]$ der von der Diagonale erzeugte Hauptfilter. Durch $\text{du}^*X := (\{\mathcal{U} / \mathcal{U} \in \underline{F}(X \times X) \text{ mit } [\Delta_X] \leq \mathcal{U}\}, \leq)$ und $\text{du}^*(f)(\mathcal{W}) := (\text{fxf})^{-1}(\mathcal{W})$ für $f: X \longrightarrow Y$, $\mathcal{W} \in \text{du}^*Y$ ist eine topologische Theorie du^* definiert derart, daß Ens^u eine topologische Unterkategorie von Ens^{du} ist (der Buchstabe d in du soll an Diagonale erinnern). Die finale Struktur in Ens^{du} ist $\text{du}_*(f)(\mathcal{U}) = (\text{fxf})(\mathcal{U}) \vee [\Delta_Y]$. Insbesondere ist für eine surjektive Abbildung $\text{du}_*(f)(\mathcal{U}) = (\text{fxf})(\mathcal{U})$.

Sei nun s eine extrem epi-Präreflexion für $\mathfrak{L} \subset \text{Ens}^u$ mit dem strengen Punkt-Separator ϕ , $(X, \mathcal{U})$ ein uniformer Raum. Es ist $\text{du}^*(s)(\text{du}_*(s)(\mathcal{U})) = (\text{sxs})^{-1}(\text{sxs})(\mathcal{U})$. Diesen Filter, der von den Mengen $U^\phi := (\text{sxs})^{-1}[(\text{sxs})(U)]$ mit $U \in \mathcal{U}$ erzeugt wird, bezeichnen wir mit $\mathcal{U}^\phi$. Aus den Sätzen 3.2.2. und 3.2.10. folgt die Äquivalenz von 1) und 2) des Satzes:

3.2.11. Satz: Für $(X, \mathcal{U}) \in \text{Ens}^u$ sind äquivalent:

- 1) $(X, \mathcal{U}) \in \mathfrak{L}$
- 2) $\mathcal{U} = \mathcal{U}^\phi$
- 3) $\varphi_X \mathcal{U} \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$
- 4) $[\Delta_X]^\phi \leq \mathcal{U}$

Beweis: 2) $\Rightarrow$ 3): Nach 2) gibt es zu $U \in \mathcal{U}$ ein $V \in \mathcal{U}$ mit $V^\phi \subset U$. Wegen $\Delta_X \subset V$ ist $\Delta_X^\phi \subset V^\phi$. Da $\Delta_X^\phi = \varphi_X \mathcal{U}$ ist, ist dann $\varphi_X \mathcal{U} \subset U$.

3) $\Rightarrow$ 2): Zu $U \in \mathcal{U}$ gibt es $V \in \mathcal{U}$ mit $V \cdot V \cdot V \subset U$. Wie man leicht nachrechnet, ist $V^\phi = \varphi_X \mathcal{U} \cdot V \cdot \varphi_X \mathcal{U}$. Da nach 3) außerdem $\varphi_X \mathcal{U} \subset V$ ist, ist $V^\phi \subset U$.

Die Äquivalenz von 3) und 4) ist wegen $\varphi_X \mathcal{U} = \Delta_X^\phi$ trivial.

4) Extrem epi-Präreflexionen in Ens^{ul}

$\underline{F}_0(\text{ExE})$ sei der Verband der Filter auf ExE einschließlich des Nullfilters. Durch $\text{dul}^* \text{E} := (\{J / J \text{ ist ein Dualfilter in } \underline{F}_0(\text{ExE}) \text{ und } [\Delta_E] \in J\}, <)$ und $\text{dul}^*(f)(J') := \{ \mathcal{U} / (fxf)(\mathcal{U}) \in J' \}$ für $f: E \longrightarrow E'$, $J' \in \text{dul}^* \text{E}'$ ist eine topologische Theorie dul^* definiert derart, daß Ens^{ul} eine topologische Unterkategorie von Ens^{dul} ist. Die finale Struktur in Ens^{dul} ist $\text{dul}_*(f)(J) = \{ \mathcal{W} / \text{Es gibt } \mathcal{U} \in J \text{ mit } \mathcal{W} \leq (fxf)(\mathcal{U}) \vee [\Delta_{E'}] \}$. Insbesondere ist für eine surjektive Abbildung $\text{dul}_*(f)(J) = \{ \mathcal{W} / \text{Es gibt } \mathcal{U} \in J \text{ mit } \mathcal{W} \leq (fxf)(\mathcal{U}) \}$.

Sei nun s eine extrem epi-Präreflexion für $\mathcal{L} \in \text{Ens}^{\text{ul}}$ mit dem strengen Punkt-Separator ϕ , (E, J) ein uniformer Limesraum. Es ist $\text{dul}^*(s)(\text{dul}_*(s)(J)) = \{ \mathcal{W} / \text{Es gibt } \mathcal{U} \in J \text{ mit } (sxs)(\mathcal{W}) \leq (sxs)(\mathcal{U}) \} = \{ \mathcal{W} / \text{Es gibt } \mathcal{U} \in J \text{ mit } \mathcal{W} \leq (sxs)^{-1}(sxs)(\mathcal{U}) \}$. Sei $\mathcal{U}^\phi := (sxs)^{-1}(sxs)(\mathcal{U})$. Aus den Sätzen 3.2.2. und 3.2.10. ergibt sich die Äquivalenz von 1) und 2) des folgenden Satzes:

3.2.12. Satz: Für $(E, J) \in \text{Ens}^{\text{ul}}$ sind äquivalent:

- 1) $(E, J) \in \text{I}\mathcal{L}$
- 2) $\mathcal{U} \in J \Rightarrow \mathcal{U}^\phi \in J$
- 3) $[\Delta_E]^\phi = [\varphi_E^J] \in J$

Beweis: 2) $\Rightarrow$ 3): trivial, da $[\Delta_E] \in J$

3) $\Rightarrow$ 2): Da $\mathcal{U}^\phi = \varphi_E^J \cdot \mathcal{U} \cdot \varphi_E^J = \Delta_E^\phi \cdot \mathcal{U} \cdot \Delta_E^\phi$ ist, ist $\mathcal{U}^\phi = [\Delta_E]^\phi \cdot \mathcal{U} \cdot [\Delta_E]^\phi$. Mit $[\Delta_E]^\phi$, $\mathcal{U} \in J$ ist dann auch $\mathcal{U}^\phi \in J$.

3.2.13. Beispiel: Wyler [21] nennt einen uniformen Limesraum gesättigt, wenn er die Aussagen 2) und 3) des Satzes für den strengen Punkt-Separator $\sigma_E^J := \{ (x, y) / \dot{x} \times \dot{y} \in J \}$ erfüllt. Hier ist $\mathcal{L} = K(\phi)$ = separierte uniforme Limesräume und folglich $\text{I}\{\text{separierte uniforme Limesräume}\} = \text{gesättigte uniforme Limesräume}$.

3. T_0^P -Räume

Es sei $M_2 = \{m_1, m_2\}$ eine zweielementige Menge, $I_2 = (M_2, \omega_{M_2})$ der zweielementige indiskrete Raum in Ens^P .

3.3.1. Satz: Für $(A, x) \in \text{Ens}^P$ sind äquivalent:

- 1) Ist $f: (B, \omega_B) \longrightarrow (A, x)$ ein extremer Monomorphismus, so ist $(B, \omega_B) \in P^P$.
- 2) Ist $f: (B, \omega_B) \longrightarrow (A, x)$ ein Monomorphismus, so ist $(B, \omega_B) \in P^P$.
- 3) Es gibt keinen extremen Monomorphismus $f: I_2 \longrightarrow (A, x)$.
- 4) Es gibt keinen Monomorphismus $f: I_2 \longrightarrow (A, x)$.
- 5) Jede stetige Abbildung $f: I_2 \longrightarrow (A, x)$ ist konstant.

Beweis: trivial

3.3.2. Satz: Ist Ens^P eine der Kategorien Ens^t , Ens^u , Ens^l , Ens^{ul} , Ens^r , so gilt: $(A, x) \in \text{Ens}^P$ erfüllt genau dann die Aussagen des Satzes, wenn (A, x) ein T_0 -Raum ist.

Beweis: klar

Wir befinden uns also in Übereinstimmung mit der bisherigen Definition der T_0 -Räume, wenn wir definieren:

3.3.3. Definition: $(A, x) \in \text{Ens}^P$ heißt ein T_0^P -Raum, wenn (A, x) die Aussagen von Satz 3.3.1. erfüllt. T_0^P bezeichne die Unterkategorie der T_0^P -Räume.

3.3.4. Bemerkungen:

- 1) Ist $\text{Ens}^{P'}$ eine topologische Unterkategorie von Ens^P , so ist $T_0^{P'} = T_0^P \cap \text{Ens}^{P'}$.
- 2) Es ist (M_2, x) ein T_0^P -Raum genau dann, wenn $x \neq \omega_{M_2}$ ist.

Im "Verband" der epireflectiven Unterkategorien von Ens^P nehmen die T_O^P -Räume eine besondere Stellung ein, wodurch sich ihre Bedeutung für das Studium der epireflectiven Unterkategorien erklärt. Dies zeigt der nachstehende Satz, zu dessen Beweis wir das folgende Lemma benötigen:

3.3.5. Lemma: Es ist $R\{I_2\} = \text{Ind}$.

Beweis: Sei $(A, \omega_A) \in \text{Ind}$. Da $R\{M_2\} = \text{Ens}$ ist, gibt es eine extrem mono-Familie $(f_i: A \rightarrow M_2)_{i \in I}$. Nach Satz 2.2.1. ist $(f_i: (A, \inf p^*(f_i)(\omega_{M_2})) \rightarrow I_2)_{i \in I}$ eine extrem mono-Familie in Ens^P . Da $p^*(f_i)(\omega_{M_2}) = \omega_A$ ist, ist $(f_i: (A, \omega_A) \rightarrow I_2)_{i \in I}$ eine extrem mono-Familie und folglich $(A, \omega_A) \in R\{I_2\}$.

3.3.6. Satz: Unter allen epireflectiven, nicht Ens -isoreflectiven Unterkategorien von Ens^P gibt es eine größte, und zwar die T_O^P -Räume. Die T_O^P -Räume sind extrem epi-reflektiv in Ens^P .

Beweis: Sei $(f_i: (B, y) \rightarrow (A_i, x_i))_{i \in I}$ eine mono-Familie in die T_O^P -Räume. Wir nehmen an, daß es eine nicht konstante, stetige Abbildung $f: I_2 \rightarrow (B, y)$ gibt. Dann ist $f(m_1) \neq f(m_2)$, und da (f_i) als mono-Familie die Punkte von B trennt, gibt es $j \in I$ mit $f_j(f(m_1)) \neq f_j(f(m_2))$. Folglich ist $f_j \circ f: I_2 \rightarrow (A_j, x_j)$ eine nicht konstante, stetige Abbildung. Dies ist ein Widerspruch zu $(A_j, x_j) \in T_O^P$. Nach Satz 1.4.3. sind die T_O^P -Räume eine extrem epi-reflektive Unterkategorie. Sie sind nicht Ens -isoreflektiv, da sonst $\text{Ind} \subset T_O^P$ und damit I_2 ein T_O^P -Raum sein müßte. Sei $\mathcal{L}$ eine weitere epireflective, nicht Ens -isoreflektive Unterkategorie. Es ist $\mathcal{L} \subset T_O^P$, denn sonst würde es einen extremen Monomorphismus $f: I_2 \rightarrow (B, y)$ mit $(B, y) \in \mathcal{L}$ geben. Dann wäre $I_2 \in \mathcal{L}$, folglich $\text{Ind} = R\{I_2\} \subset \mathcal{L}$.

und nach Satz 2.3.5. $\mathcal{L}$ Ens-iso-reflektiv.

3.3.7. Folgerung: Eine epireflektive Unterkategorie $\mathcal{L}$ ist genau dann nicht Ens-iso-reflektiv, wenn $\mathcal{L} \subset T_0^P$ ist.

Für $(A, x) \in \text{Ens}^P$ sei die Relation $\mathcal{S}_A^P x$ definiert durch
 $\mathcal{S}_A^P x := \{(a, b) \mid \text{Es gibt } f: I_2 \longrightarrow (A, x) \text{ mit } f[M_2] = \{a, b\}\} =$
 $\{(a, b) \mid \text{Der Unterraum } (\{a, b\}, p^*(j)(x)) \text{ ist indiskret (j die Inklusion)}\}.$
 $\mathcal{S}_A^P x$ ist reflexiv und symmetrisch, aber im allgemeinen nicht transitiv. $\mathcal{S}_A^{\text{par}} x$ sei die kleinste $\mathcal{S}_A^P x$ umfassende Äquivalenzrelation und $s_{(A, x)}^P: (A, x) \longrightarrow (A / \mathcal{S}_A^{\text{par}} x, p_*(s_{(A, x)}^P)(x))$ die natürliche Abbildung.

3.3.8. Satz: $(\mathcal{S}_A^P)_{A \in \text{Ens}}$ ist die Familie der Strukturabbildungen eines topologischen Punkt-Separators
 $P^P: \text{Ens}^P \longrightarrow \text{Ens}^T$ mit $K(P^P) = T_0^P$. Die T_0^P -Reflexion erhält man durch transfinite Konstruktion aus der extrem epi-Präreflexion $(s_{(A, x)}^P)_{(A, x) \in \text{Ens}^P}$.

Beweis: Es ist klar, daß $\mathcal{S}_A^P x = \Delta_A$ genau dann ist, wenn $(A, x) \in T_0^P$ ist. P^P ist ein Punkt-Separator, denn sei $f: (A, x) \longrightarrow (B, y)$ und $(a, b) \in \mathcal{S}_A^P x$. Es gibt $g: I_2 \longrightarrow (A, x)$ mit $g[M_2] = \{a, b\}$. Dann ist $f \circ g: I_2 \longrightarrow (B, y)$ mit $f \circ g[M_2] = \{f(a), f(b)\}$, also $(f(a), f(b)) \in \mathcal{S}_B^P y$. Es folgt, daß $(s_{(A, x)}^P)$ eine extrem epi-Präreflexion für die T_0^P -Räume ist und transfinite Konstruktion die T_0^P -Reflexion ergibt. Damit P^P topologisch ist, ist zu zeigen, daß $\mathcal{S} x = \inf_{i \in I} r^*(f_i)(\mathcal{S} y_i) = \bigcap_{i \in I} (f_i x f_i)^{-1}(\mathcal{S} y_i)$ ist für jede initial-Familie $(f_i: (A, x) \longrightarrow (B_i, y_i))_{i \in I}$. Da P^P ein Punkt-Separator ist, ist sicher $\mathcal{S} x \leq \inf_{i \in I} r^*(f_i)(\mathcal{S} y_i)$. Ist $(a_1, a_2) \in \inf_{i \in I} r^*(f_i)(\mathcal{S} y_i)$, so gibt es zu jedem $i \in I$ eine stetige Abbildung $g_i: I_2 \longrightarrow (B_i, y_i)$ mit $g_i[M_2] = \{f_i(a_1), f_i(a_2)\}$. Sei $M_2 = \{m_1, m_2\}$. Da die Vertauschung von m_1 und m_2 einen

Isomorphismus $I_2 \rightarrow I_2$ liefert, können wir o.B.d.A. annehmen, daß $g_i(m_1)=f_i(a_1)$ und $g_i(m_2)=f_i(a_2)$ ist. Für $f: M_2 \rightarrow A$, definiert durch $f(m_1):=a_1$, $f(m_2):=a_2$, gilt dann $f_i \circ f = g_i$ für alle $i \in I$. Da x die initiale Struktur bezüglich der Familie (f_i) ist, ist nach Satz 2.3.2. auch $f: I_2 \rightarrow (A, x)$ stetig, und es ist $f[M_2] = \{a_1, a_2\}$. Damit ist $(a_1, a_2) \in \mathcal{S} x$.

3.3.9. Folgerungen:

- 1) $P^{p-1} \text{Ens}^{\text{är}} = \{(A, x) / \mathcal{S}_A^p x \text{ ist eine Äquivalenzrelation}\}$ ist eine topologische Unterkategorie mit $IT_0^p \subset P^{p-1} \text{Ens}^{\text{är}} \subset \text{Ens}^p$. (Satz 2.2.6.)
- 2) In Ens^p gibt es eine ausgezeichnete coreflektive Unterkategorie, die gegeben ist als das Bild des zu P^p linksadjungierten Funktors.

Aus den Sätzen 3.2.2. und 3.2.3. erhalten wir die folgende Charakterisierung der IT_0^p -Räume:

3.3.10. Satz: $1_A: (A, x) \rightarrow (A, p^*(s_{(A, x)}^p)(p_*(s_{(A, x)}^p)(x)))$ ist eine Ens-iso-Präreflexion für die IT_0^p -Räume. Insbesondere sind äquivalent:

- 1) $(A, x) \in IT_0^p$
- 2) $x = p^*(s_{(A, x)}^p)(p_*(s_{(A, x)}^p)(x))$

Für $(A, x) \in IT_0^p$ ist

$s_{(A, x)}^p: (A, x) \rightarrow (A/\mathcal{S}_A^p x, p_*(s_{(A, x)}^p)(x))$ die T_0^p -Reflexion.

3.3.11. Beispiele:

1) Ens^t und Ens^u : Für $(X, \mathcal{Z}) \in \text{Ens}^t$ ist $x \mathcal{S}^t y$ äquivalent mit $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$. Für $(X, \mathcal{U}) \in \text{Ens}^u$ ist $x \mathcal{S}^u y$ äquivalent mit $(x, y) \in \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$. Für $p=t, u$ ist bereits $\mathcal{S}^p = \mathcal{S}^{p\text{är}}$ die die T_0^p -Reflexion bestimmende Äquivalenzrelation. Der zur T_0^p -Reflexion führende transfinite Konstruktionsprozeß endet spätestens nach dem ersten Schritt.

Da für jeden topologischen Raum die T_0^t -Reflexion und für jeden uniformen Raum die T_0^u -Reflexion ([17]) initial ist, ist $IT_0^t = \text{Ens}^t$ und $IT_0^u = \text{Ens}^u$.

2) Ens^1 : Für $(E, q) \in \text{Ens}^1$ ist $x \mathfrak{s}^1 y$ äquivalent mit $(\dot{x} \dot{q} y$ und $\dot{y} \dot{q} x)$. $\mathfrak{s}^1$ ist im allgemeinen keine Äquivalenzrelation. Dies zeigt der dreielementige Limesraum $(\{x, y, z\}, q)$, dessen Struktur von den Konvergenzen $\dot{x} \dot{y} \dot{q} x$, $\dot{x} \dot{y} \dot{z} \dot{q} y$, $\dot{y} \dot{z} \dot{q} z$ erzeugt wird. Die extrem epi-Präreflexion $(s_{(E, q)}^1)$ ist keine Reflexion, da der Faktorisierungsprozeß im allgemeinen nicht idempotent ist. Wir geben hierfür ein Beispiel an. Es sei $E := \mathbb{N} \times \{a_1, a_2\}$, $a_1 \neq a_2$, $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen. Für $i=1, 2$ sei $\mathfrak{f}_i$ der von der Filterbasis

$\{(\mathbb{N} \times \{a_i\}) \cup \{(m, a_{3-i}) / m \geq n\} / n \in \mathbb{N}\}$ erzeugte Filter. q sei die von den Konvergenzen $\mathfrak{f}_i \dot{q} (n, a_i)$, $n \in \mathbb{N}$, $i=1, 2$, erzeugte Limesstruktur. Es ist $\mathfrak{s}^1 = \mathfrak{s}^{1\text{är}}$, und der Quotientenraum $(E/\mathfrak{s}^1, 1_{\star}(s_{(E, q)}^1)(q))$ ist der indiskrete Raum I_2 . Die T_0^1 -Reflexion von (E, q) ist die Abbildung auf den einelementigen Limesraum. Da sie nicht initial ist, ist $(E, q) \notin IT_0^1$. Die beiden Beispiele zeigen, daß $IT_0^1 \not\subseteq P^{1-1} \text{Ens}^{\text{är}} \not\subseteq \text{Ens}^1$ ist (siehe auch 3.2.8.). Die IT_0^1 -Räume wurden in 3.2.7. charakterisiert.

3) Ens^{ul} : Für $(E, J) \in \text{Ens}^{\text{ul}}$ ist $x \mathfrak{s}^{\text{ul}} y$ äquivalent mit $\dot{x} \dot{x} \dot{y} \dot{y} \in J$. In Ens^{ul} ist zwar $\mathfrak{s}^{\text{ul}} = \mathfrak{s}^{\text{ulär}}$, aber der Faktorisierungsprozeß ist im allgemeinen nicht idempotent. Dies zeigt der von Wyler in [21] angegebene Raum (E, J) , den wir unter 3.2.8. betrachtet haben. Für diesen Raum ist $(E/\mathfrak{s}^{\text{ul}}, \text{ul}_{\star}(s_{(E, J)}^{\text{ul}})(J))$ der indiskrete Raum I_2 . Die T_0^{ul} -Reflexion von (E, J) ist die Abbildung auf den einelementigen uniformen Limesraum. Die IT_0^{ul} -Räume sind die gesättigten uniformen Limesräume (siehe 3.2.13.).

Die Beispiele legen die folgende Definition nahe:

3.3.12. Definition: Eine topologische Kategorie $\text{Ens}^{\mathcal{P}}$ heißt gesättigt, wenn $\text{IT}_0^{\mathcal{P}} = \text{Ens}^{\mathcal{P}}$ ist.

3.3.13. Satz:

- 1) In jeder topologischen Kategorie $\text{Ens}^{\mathcal{P}}$ gibt es eine größte gesättigte topologische Unterkategorie, und zwar $\text{IT}_0^{\mathcal{P}}$.
- 2) Jede topologische Unterkategorie $\text{Ens}^{\mathcal{P}'}$ einer gesättigten topologischen Kategorie $\text{Ens}^{\mathcal{P}}$ ist gesättigt.

Beweis: Ist $\mathcal{E} \subset \text{Ens}^{\mathcal{P}'} \subset \text{Ens}^{\mathcal{P}}$, so stimmen die Ens-iso-reflexiven Hüllen von $\mathcal{E}$ in $\text{Ens}^{\mathcal{P}'}$ und $\text{Ens}^{\mathcal{P}}$ überein.

1) Sei $\text{Ens}^{\mathcal{P}'} := \text{IT}_0^{\mathcal{P}}$. Es ist $\text{T}_0^{\mathcal{P}'} = \text{T}_0^{\mathcal{P}} \cap \text{Ens}^{\mathcal{P}'} = \text{T}_0^{\mathcal{P}}$ und folglich $\text{I}^{\mathcal{P}'} \text{T}_0^{\mathcal{P}'} = \text{I}^{\mathcal{P}} \text{T}_0^{\mathcal{P}} = \text{Ens}^{\mathcal{P}'}$. Sei $\text{Ens}^{\mathcal{P}''}$ eine gesättigte Kategorie mit $\text{Ens}^{\mathcal{P}''} \subset \text{Ens}^{\mathcal{P}}$. Es ist $\text{Ens}^{\mathcal{P}''} = \text{I}^{\mathcal{P}''} \text{T}_0^{\mathcal{P}''} = \text{I}^{\mathcal{P}} (\text{T}_0^{\mathcal{P}} \cap \text{Ens}^{\mathcal{P}''}) \subset \text{I}^{\mathcal{P}} \text{T}_0^{\mathcal{P}}$.

2) beweisen wir im nächsten Abschnitt.

4. Eine bijektive Zuordnung im "Verband" der epireflektiven Unterkategorien von $\text{Ens}^{\mathcal{P}}$

3.4.1. Lemma: In jeder topologischen Kategorie $\text{Ens}^{\mathcal{P}}$ gilt:

Ist $f: (A, x) \longrightarrow (B, \omega_B) \pi (C, z)$ ein von einem $\text{T}_0^{\mathcal{P}}$ -Raum (A, x) ausgehender extremer Monomorphismus, so ist auch $p_C \circ f: (A, x) \longrightarrow (C, z)$ ein extremer Monomorphismus. Hierbei ist p_C die Projektion $p_C: (B, \omega_B) \pi (C, z) \longrightarrow (C, z)$.

Beweis: Die extremen Monomorphismen in $\text{Ens}^{\mathcal{P}}$ sind die initialen, injektiven, stetigen Abbildungen. Die Produktstruktur ist $\inf\{p^*(p_B)(\omega_B), p^*(p_C)(z)\} = \inf\{\omega_{B \times C}, p^*(p_C)(z)\} = p^*(p_C)(z)$. Damit ist p_C initial. Da außerdem f initial ist, ist $p_C \circ f$ initial. Ist $p_C \circ f$ nicht injektiv, so gibt es $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$,

derart, daß $p_C \circ f \circ j: \{a_1, a_2\} \rightarrow C$ konstant ist, wobei $j: \{a_1, a_2\} \rightarrow A$ die Inklusion ist. Da jede konstante Abbildung stetig ist, ist $p^*(p_C \circ f \circ j)(z) = \omega_{\{a_1, a_2\}}$. Hieraus folgt mit der Initialität von $p_C \circ f$, daß $p^*(j)(x) = \omega_{\{a_1, a_2\}}$ ist. Dies ist ein Widerspruch zu $(A, x) \in T_0^D$.

3.4.2. Satz: 1) Für $\mathcal{E} \subset T_0^D$ ist $R\mathcal{E} = I\mathcal{E} \cap T_0^D$.

2) Für $\mathcal{E} \not\subset T_0^D$ ist $R\mathcal{E} = I\mathcal{E}$.

Für $\mathcal{E} \subset \text{Ens}^D$ sind äquivalent:

a) $R\mathcal{E} = I\mathcal{E}$

b) $\mathcal{E}$ enthält einen Raum, der I_2 als extrem mono-Unterobjekt besitzt.

Beweis: 1) Sicher ist $R\mathcal{E} \subset I\mathcal{E} \cap T_0^D$. Sei $(A, x) \in I\mathcal{E} \cap T_0^D$.

Da $(A, x) \in I\mathcal{E} = R(\mathcal{E} \cup \text{Ind})$ ist, gibt es einen extremen Monomorphismus $f: (A, x) \rightarrow (B, \omega_B) \pi (C, z)$ mit $(C, z) \in R\mathcal{E}$. Man kann zum Beispiel die Abbildung $f: (A, x) \rightarrow (A, \omega_A) \pi (A, x)_{R\mathcal{E}}$ nehmen, für die $p_A \circ f = 1_A$ und $p_C \circ f: (A, x) \rightarrow (A, x)_{R\mathcal{E}}$ die $R\mathcal{E}$ -Reflexion ist. Nach dem Lemma ist dann $p_C \circ f: (A, x) \rightarrow (C, z)$ ein extremer Monomorphismus. Da $R\mathcal{E}$ abgeschlossen gegenüber extrem mono-Unterobjekten ist, ist $(A, x) \in R\mathcal{E}$.

2) Ist $\mathcal{E} \not\subset T_0^D$, so gibt es einen extremen Monomorphismus

$f: I_2 \rightarrow (E, e)$ mit $(E, e) \in \mathcal{E}$. Dann ist $I_2 \in R\mathcal{E}$ und nach

3.3.5. $\text{Ind} \subset R\mathcal{E}$. Also ist $I\mathcal{E} = R(\mathcal{E} \cup \text{Ind}) = R\mathcal{E}$.

Die Äquivalenz von a) und b) ist damit auch klar.

3.4.3. Satz: Die Zuordnungen $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A} \cap T_0^D$ und $\mathcal{B} \mapsto I\mathcal{B}$

sind zueinander inverse und folglich bijektive Zuordnungen zwischen den epireflektiven Unterkategorien $\mathcal{A}$ von Ens^D mit $\text{Ind} \subset \mathcal{A} \subset IT_0^D$ und den epireflektiven Unterkategorien $\mathcal{B}$ von Ens^D mit $P^D \subset \mathcal{B} \subset T_0^D$.

Beweis: Es ist zu zeigen a) $I\mathcal{L} \cap T_0^P = \mathcal{L}$, b) $I(\mathcal{A} \cap T_0^P) = \mathcal{A}$.

a) Nach dem vorhergehenden Satz ist $\mathcal{L} = R\mathcal{L} = I\mathcal{L} \cap T_0^P$.

b) Sicher ist $I(\mathcal{A} \cap T_0^P) \subset \mathcal{A}$, denn wegen $\text{Ind} \subset \mathcal{A}$ ist $\mathcal{A}$ Ens-iso-reflektiv nach Satz 2.3.5. Sei $(A, x) \in \mathcal{A}$ und

$r: (A, x) \longrightarrow (A, x)_{T_0^P}$ die T_0^P -Reflexion von (A, x) . Wegen

$\mathcal{A} \subset IT_0^P$ ist r initial, und mit Hilfe einer zu r rechtsinversen Abbildung folgt wie im Beweis zu Satz 2.4.6., daß

$(A, x)_{T_0^P} \in \mathcal{A} \cap T_0^P$ ist. Da r initial ist, ist $(A, x) \in I(\mathcal{A} \cap T_0^P)$.

3.4.4. Vereinbarung: Entsprechen sich $\mathcal{A}$ und $\mathcal{L}$ unter den im Satz angegebenen Zuordnungen, so schreiben wir $\mathcal{A} \longleftrightarrow \mathcal{L}$.

3.4.5. Folgerungen:

- 1) $\mathcal{V}$ sei eine epireflektive Unterkategorie von Ens^P mit $\mathcal{L} \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{A}$, $\mathcal{A} \longleftrightarrow \mathcal{L}$. Dann ist $\mathcal{V} = \mathcal{L}$ oder $\mathcal{V} = \mathcal{A}$.
- 2) Für eine Familie $(\mathcal{L}_i)_{i \in I}$ epireflektiver Unterkategorien mit $\mathcal{L}_i \subset T_0^P$ ist $I(\bigcap_{i \in I} \mathcal{L}_i) = \bigcap_{i \in I} I\mathcal{L}_i$.
- 3) Ist $\mathcal{L}$ eine von Ens^P verschiedene initial-epireflektive Unterkategorie von Ens^P , so ist $\mathcal{L} = T_0^P$.
- 4) Jede topologische Unterkategorie $\text{Ens}^{P'}$ einer gesättigten topologischen Kategorie Ens^P ist gesättigt.

Beweis: 1) Aus $\mathcal{L} \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{A} = I\mathcal{L}$ folgt $I\mathcal{V} = I\mathcal{L}$. Ist $\mathcal{V} \neq \mathcal{A}$, so ist $\mathcal{V} \neq I\mathcal{V}$, also $\mathcal{V}$ nicht Ens-iso-reflektiv. Nach 3.3.7. ist $\mathcal{V} \subset T_0^P$, und mit dem Satz folgt $\mathcal{V} = \mathcal{L}$.

2) Da die Zuordnung $\mathcal{A} \longmapsto \mathcal{A} \cap T_0^P$ trivialerweise mit Durchschnitten vertauschbar ist, gilt dies auch für die inverse Zuordnung.

3) $\mathcal{L}$ ist nicht Ens-iso-reflektiv, denn sonst wäre $\mathcal{L}$ sogar iso-reflektiv und damit $\mathcal{L} = \text{Ens}^P$. Also ist $\mathcal{L} \subset T_0^P$. Dann ist $\text{Ens}^P = I\mathcal{L} = IT_0^P$, und nach dem Satz ist $\mathcal{L} = T_0^P$.

4) Da $\text{Ens}^{\mathcal{P}}$ gesättigt ist, ist $\text{Ens}^{\mathcal{P}'} \subset \mathcal{I}^{\mathcal{P}} \mathcal{T}_0^{\mathcal{P}}$. Wegen der bijektiven Zuordnung ist $\mathcal{I}^{\mathcal{P}'} \mathcal{T}_0^{\mathcal{P}'} = \mathcal{I}^{\mathcal{P}} \mathcal{T}_0^{\mathcal{P}'} = \mathcal{I}^{\mathcal{P}} (\mathcal{T}_0^{\mathcal{P}} \cap \text{Ens}^{\mathcal{P}'}) = \text{Ens}^{\mathcal{P}'}$.

Die epireflektiven Unterkategorien $\mathcal{A}$ mit $\text{Ind} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{I} \mathcal{T}_0^{\mathcal{P}}$ sind genau die gesättigten Ens-iso-reflektiven Unterkategorien. Die epireflektiven Unterkategorien $\mathcal{L}$ mit $\mathcal{P}^{\mathcal{P}} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{T}_0^{\mathcal{P}}$ sind genau die epireflektiven, nicht Ens-iso-reflektiven Unterkategorien. Über den "Verband" der epireflektiven Unterkategorien von $\text{Ens}^{\mathcal{P}}$ läßt sich sagen: Er zerfällt in zwei "Unterverbände", der eine bestehend aus den Ens-iso-reflektiven Unterkategorien, der andere aus den nicht Ens-iso-reflektiven Unterkategorien. Letzterer ist "isomorph" zu einem "Unterverband" des ersteren. Insbesondere gilt:

3.4.6. Satz: Für eine gesättigte topologische Kategorie $\text{Ens}^{\mathcal{P}}$, zum Beispiel $\text{Ens}^{\mathcal{T}}$ und $\text{Ens}^{\mathcal{U}}$, zerfällt der "Verband" der epireflektiven Unterkategorien in zwei "isomorphe Unterverbände".

Sei $\mathcal{A} \longleftrightarrow \mathcal{L}$ in $\text{Ens}^{\mathcal{P}}$. Wir untersuchen nun, in welcher Beziehung die $\mathcal{A}$ - und die $\mathcal{L}$ -Reflexion zueinander stehen. Da $\mathcal{A} = \mathcal{I} \mathcal{L}$ ist, erhalten wir die $\mathcal{A}$ -Reflexion als den Ens-iso-Faktor der $\mathcal{L}$ -Reflexion nach Satz 2.3.7. Der folgende Satz zeigt, wie sich umgekehrt die $\mathcal{L}$ -Reflexion aus der $\mathcal{A}$ -Reflexion bestimmt.

3.4.7. Satz:

1) Für $\mathcal{A} \longleftrightarrow \mathcal{L}$ in $\text{Ens}^{\mathcal{P}}$ gilt $r^{\mathcal{L}} = r^{\mathcal{T}_0^{\mathcal{P}}} \cdot r^{\mathcal{A}}$.

Insbesondere ist für $\mathcal{L} \subset \mathcal{T}_0^{\mathcal{P}}$ $r^{\mathcal{L}} = r^{\mathcal{T}_0^{\mathcal{P}}} \cdot r^{\mathcal{I} \mathcal{L}}$.

2) Für $(A, x) \in \mathcal{I} \mathcal{T}_0^{\mathcal{P}}$ sind äquivalent

a) $(A, x) \in \mathcal{A}$

b) $(A, x)_{\mathcal{T}_0^{\mathcal{P}}} \in \mathcal{L}$

3) Jede Epireflexion in $\text{Ens}^{\mathcal{P}}$ ist eine Ens-iso-Reflexion

oder das Kompositum einer Ens-iso-Reflexion und anschließender T_0^D -Reflexion.

Beweis: Da $\mathcal{A} = I(\mathcal{A} \cap T_0^D)$ und $\mathcal{A} \cap T_0^D = \mathcal{B}$ ist, folgt 1) aus Satz 2.4.6. für $\mathcal{E} = \mathcal{A} \cap T_0^D$. Für $\mathcal{E} \subset T_0^D$ ist $I\mathcal{E} \longleftrightarrow R\mathcal{E}$ nach Satz 3.4.2. 2) und 3) folgen aus 1).

3.4.8. Bemerkung: Nach Herrlich [4] und Wyler [23] ist jede coreflektive Unterkategorie von Ens^D , die einen nichtleeren Raum enthält, bicoreflektiv, in unserer Sprache Ens-iso-coreflektiv. Ein entsprechender Sachverhalt gilt nicht einmal für epi-reflektive Unterkategorien; zum Beispiel ist P^D nicht Ens-iso-reflektiv. Der vorstehende Satz zeigt aber, daß sich die Epi-reflexionen auf die Ens-iso-Reflexionen und die T_0^D -Reflexion zurückführen lassen.

Die extrem epi-reflektive Hülle $Q\mathcal{E}$ steht mit $R\mathcal{E}$ in der Beziehung $Q\mathcal{E} = \{(A, x) / \text{Es gibt } y \in p^*A \text{ mit } x \leq y \text{ und } (A, y) \in R\mathcal{E}\}$. Nach den Sätzen 3.4.2. und 3.4.7. ist $R\mathcal{E}$ bzw. die $R\mathcal{E}$ -Reflexion vollständig durch $I\mathcal{E}$ und T_0^D bzw. die $I\mathcal{E}$ - und die T_0^D -Reflexion bestimmt. Etwas Ähnliches gilt für $Q\mathcal{E}$ und die $Q\mathcal{E}$ -Reflexion.

3.4.9. Satz:

- 1) Für $\mathcal{E} \subset T_0^D$ ist $Q\mathcal{E} = \{(A, x) / (A, x)_{I\mathcal{E}} \in T_0^D\}$. Die $Q\mathcal{E}$ -Reflexion ist der extrem epi-Faktor von $r^{T_0^D} \circ r^{I\mathcal{E}}$.
- 2) Für $\mathcal{E} \not\subset T_0^D$ ist $Q\mathcal{E} = \text{Ens}^D$.

Beweis: 1) Da $r^{R\mathcal{E}} = r^{I\mathcal{E}} \circ r^{Q\mathcal{E}}$ und $R\mathcal{E} \subset T_0^D$ ist, ist $Q\mathcal{E} \subset \{(A, x) / (A, x)_{I\mathcal{E}} \in T_0^D\}$. Ist $(A, x)_{I\mathcal{E}} \in T_0^D$, so ist $(A, x)_{I\mathcal{E}} \in I\mathcal{E} \cap T_0^D = R\mathcal{E} \subset Q\mathcal{E}$. Da $1_A: (A, x) \longrightarrow (A, x_{\mathcal{E}}) = (A, x)_{I\mathcal{E}}$ ein Monomorphismus ist und $Q\mathcal{E}$ abgeschlossen gegenüber mono-Unterobjekten ist, ist $(A, x) \in Q\mathcal{E}$. Die $Q\mathcal{E}$ -Reflexion ist nach Satz 1.4.3. der

extrem epi-Faktor der $R\mathcal{E}$ -Reflexion $r^{R\mathcal{E}} = r^{T_0^D} \cdot r^{I\mathcal{E}}$.

2) Für $\mathcal{E} \neq T_0^D$ ist $\text{Ind} \subset I\mathcal{E} = R\mathcal{E} \subset Q\mathcal{E}$. Da $Q\mathcal{E}$ abgeschlossen gegenüber mono-Unterobjekten und $1_A: (A, x) \longrightarrow (A, \omega_A)$ stetig ist, ist dann $Q\mathcal{E} = \text{Ens}^D$.

3.4.10. Beispiel: Nach Thomas [19] heißt ein Raum $(X, \mathcal{X}) \in \text{Ens}^t$ ein T_{2b} -Raum, wenn der in die T_3 -Räume reflektierte Raum $(X, \mathcal{X})_{T_3}$ ein T_1 -Raum bzw. ein T_0 -Raum ist (wir benutzen T_3 und regulär gerade umgekehrt wie Thomas). Da $T_3 \cap T_0 = \text{reguläre Räume}$ ist, ist nach Satz 3.4.3. $I\{\text{reguläre Räume}\} = T_3\text{-Räume}$. Durch Anwendung des vorstehenden Satzes auf $\mathcal{E} = \text{reguläre Räume}$ folgt $T_{2b}\text{-Räume} = Q\{\text{reguläre Räume}\}$. Die von Thomas angegebenen Beispiele zeigen daher, daß reguläre Räume $\neq Q\{\text{reguläre Räume}\} \neq T_{2a}\text{-Räume}$ ist.

5. Einfachheit epireflektiver Unterkategorien

3.5.1. Definition: Nach Herrlich [3] heißt eine epireflektive Unterkategorie $\mathcal{L}$ von Ens^D einfach, wenn es einen Raum $(E, e) \in \mathcal{L}$ mit $R\{(E, e)\} = \mathcal{L}$ gibt. Zum Beispiel sind $P^D = R\{(M_1, \omega_{M_1})\}$ und $\text{Ind} = R\{I_2\}$ einfach.

3.5.2. Satz: Ist $\mathcal{O} \longleftrightarrow \mathcal{L}$ in Ens^D , so ist $\mathcal{O}$ einfach genau dann, wenn $\mathcal{L}$ einfach ist. Genauer gilt:

- 1) Ist $\mathcal{L} = R\{(E, e)\}$, $E \neq \emptyset$, so ist $\mathcal{O} = R\{(E, e) \pi I_2\}$.
- 2) Ist $\mathcal{O} = R\{(E, e)\}$, so ist $\mathcal{L} = R\{(E, e)_{\mathcal{L}}\}$.

Beweis: 1) Aus $I\mathcal{L} = R(\mathcal{L} \cup \text{Ind})$ und $\text{Ind} = R\{I_2\}$ folgt, daß $\mathcal{O} = I\mathcal{L} = R\{(E, e), I_2\}$ ist. Sicher ist $R\{(E, e) \pi I_2\} \subset R\{(E, e), I_2\}$. Damit die umgekehrte Inklusion gilt, genügt es zu zeigen: Ist $(A, x) \pi (B, y)$ das Produkt von (A, x) und (B, y) , $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, so ist (A, x) ein extrem mono-Unterobjekt von $(A, x) \pi (B, y)$.

Wegen $B \neq \emptyset$ gibt es eine konstante und damit stetige Abbildung $f: (A, x) \longrightarrow (B, y)$. Zu f und $1_{(A, x)}$ gibt es genau einen Morphismus $\bar{f}: (A, x) \longrightarrow (A, x) \pi (B, y)$ mit $p_B \cdot \bar{f} = f$ und $p_A \cdot \bar{f} = 1_{(A, x)}$, p_A, p_B Projektionen. $\bar{f}$ ist initial und injektiv, also ein extremer Monomorphismus.

2) Damit $R\{(E, e)_{\mathcal{L}}\} = \mathcal{L}$ ist, genügt es wegen der bijektiven Zuordnung von Satz 3.4.3. zu zeigen, daß $IR\{(E, e)_{\mathcal{L}}\} = I\mathcal{L} = \mathcal{A}$ ist. Sicher ist $IR\{(E, e)_{\mathcal{L}}\} \subset \mathcal{A}$. Nach Satz 3.4.7. ist $(E, e)_{\mathcal{L}} = (E, e)_{T_0^p}$. Da $\mathcal{A} \subset IT_0^p$ ist, ist die T_0^p -Reflexion von (E, e) initial, also $(E, e) \in I\{(E, e)_{\mathcal{L}}\}$. Damit gilt $\mathcal{A} = R\{(E, e)\} = I\{(E, e)\} \subset I\{(E, e)_{\mathcal{L}}\} = IR\{(E, e)_{\mathcal{L}}\}$. Es folgt $\mathcal{A} = IR\{(E, e)_{\mathcal{L}}\}$.

3.5.3. Satz: Die epireflektive Unterkategorie der T_3 -Räume von Ens^t ist nicht einfach.

Beweis: Da $T_3 \cap T_0^t = \text{reguläre Räume}$ ist, ist $T_3 \longleftrightarrow \text{reguläre Räume}$. Nach Herrlich [4] sind die regulären Räume nicht einfach, so daß nach dem Satz auch die T_3 -Räume nicht einfach sind. Da dieser Beweis auf den vorhergehenden Sätzen beruht, scheint ein direkter Beweis des Satzes wünschenswert zu sein. Wir fassen daher noch einmal die Beweisschritte zusammen. Man zeigt, daß die T_0 -Reflexion initial ist und für einen T_3 -Raum $(X, \mathcal{X})$ auch $(X, \mathcal{X})_{T_0}$ ein T_3 -Raum und folglich regulär ist. Annahme: $R\{(X, \mathcal{X})\} = T_3$ -Räume. Die zu $1_X: (X, \mathcal{X}) \longrightarrow (X, \omega_X)$ und $r_{(X, \mathcal{X})}^{T_0}: (X, \mathcal{X}) \longrightarrow (X, \mathcal{X})_{T_0}$ gehörige Abbildung $r: (X, \mathcal{X}) \longrightarrow (X, \omega_X) \pi (X, \mathcal{X})_{T_0}$ in den Produktraum ist injektiv und initial, also ein extremer Monomorphismus. Damit ist auch $R\{(X, \omega_X) \pi (X, \mathcal{X})_{T_0}\} = T_3$ -Räume. Im Widerspruch zur Nichteinfachheit der regulären Räume zeigt man nun $R\{(X, \mathcal{X})_{T_0}\} = \text{reguläre Räume}$. Da ein regulärer Raum $(Y, \mathcal{Y})$ insbesondere ein

T_3 -Raum ist, gibt es eine Menge I und einen extremen Monomorphismus $f: (Y, \mathcal{Y}) \longrightarrow ((X, \omega_X) \pi (X, \mathcal{X})_{T_0})^I$. Dieser Produkt-raum ist isomorph zu $(X^I, \omega_{X^I}) \pi ((X, \mathcal{X})_{T_0})^I$. Man beweist Lemma 3.4.1. für die topologischen Räume. Aus diesem folgt, daß $(Y, \mathcal{Y})$ ein extrem mono-Unterobjekt von $((X, \mathcal{X})_{T_0})^I$ ist. Also ist $(Y, \mathcal{Y}) \in R\{(X, \mathcal{X})_{T_0}\}$.

6. Eine Charakterisierung der Ens-iso-reflektiven Hülle extrem epi-reflektiver Unterkategorien von Ens^P

3.6.1. Satz: Sei ϕ ein Punkt-Separator, P^P der Punkt-Separator von 3.3.8. für die T_0^P -Räume, $K(\phi) := \{(A, x) / \varphi_A x = \Delta_A\}$ und $\mathcal{O}(\phi) := \{(A, x) / \varphi_A x \subset \mathcal{P}_A^P x\}$. Es gilt:

- 1) $IK(\phi) = \mathcal{O}(\phi) \cap IT_0^P$
- 2) Es ist $IK(\phi) = \mathcal{O}(\phi)$ für alle Punkt-Separatoren ϕ genau dann, wenn $IT_0^P = \text{Ens}^P$ ist.

Beweis: Sei $(f_i: (A, x) \longrightarrow (B_i, \mathcal{Y}_i))_{i \in I}$ eine initial-Familie mit $(B_i, \mathcal{Y}_i) \in \mathcal{O}(\phi)$. Dann ist nach Satz 3.3.8. $(f_i: (A, \mathcal{S} x) \longrightarrow (B_i, \mathcal{S} \mathcal{Y}_i))_{i \in I}$ eine initial-Familie in Ens^T . Für $(a, b) \in \varphi_A x$ ist $(f_i(a), f_i(b)) \in \varphi_{\mathcal{Y}_i} \subset \mathcal{S} \mathcal{Y}_i$ für alle $i \in I$, also $(a, b) \in \inf r^*(f_i)(\mathcal{S} \mathcal{Y}_i) = \mathcal{S} x$. Folglich ist $(A, x) \in \mathcal{O}(\phi)$. Damit ist $\mathcal{O}(\phi)$ eine topologische Unterkategorie von Ens^P mit $K(\phi) \subset \mathcal{O}(\phi)$. Da außerdem $K(\phi) \subset T_0^P$ ist, ist $IK(\phi) \subset \mathcal{O}(\phi) \cap IT_0^P$. Für $(A, x) \in \mathcal{O}(\phi) \cap T_0^P$ ist $\Delta_A \subset \varphi_A x \subset \mathcal{P}_A^P x = \Delta_A$, so daß $(A, x) \in K(\phi)$ ist. Wegen der bijektiven Zuordnung von Satz 3.4.3. ist dann $IK(\phi) = I(\mathcal{O}(\phi) \cap T_0^P) = I((\mathcal{O}(\phi) \cap IT_0^P) \cap T_0^P) = \mathcal{O}(\phi) \cap IT_0^P$. Ist $IK(\phi) = \mathcal{O}(\phi)$ für alle Punkt-Separatoren, so gilt dies auch für $\phi = P^P$, und man erhält $IT_0^P = IK(P^P) = \mathcal{O}(P^P) = \{(A, x) / \mathcal{P}_A^P x \subset \mathcal{S}_A^P x\} = \text{Ens}^P$.

Wir nennen zwei Punkte a und b eines Raumes (A, x) T_0^P -verschie-

den, falls sie sich durch eine stetige Abbildung in einen T_O^P -Raum trennen lassen. Äquivalent hierzu ist, daß $r_O(a) \neq r_O(b)$ für die T_O^P -Reflexion r_O von (A, x) ist. Sei Ens^P gesättigt, d. h. $\text{Ens}^P = \text{IT}_O^P$. Dann ist bereits $\mathcal{S}^P$ die die T_O^P -Reflexion bestimmende Äquivalenzrelation (Satz 3.3.10.), und zwei Punkte $a, b \in A$ sind genau dann T_O -verschieden, wenn $(a, b) \notin \mathcal{S}_A^P x$ ist. Sei $\Phi : \text{Ens}^P \longrightarrow \text{Ens}^r$ ein Punkt-Separator. a und b haben die Eigenschaft $E(\Phi)$, falls $(a, b) \notin \mathcal{P}_A x$ ist. Der vorhergehende Satz nimmt für eine gesättigte Kategorie Ens^P die folgende Form an:

3.6.2. Satz:

- | | | |
|----|--|---|
| 1) | $K(\Phi) = \left\{ (A, x) / \right.$ | $\left. \begin{array}{l} \text{Je zwei verschiedene Punkte haben} \\ \text{die Eigenschaft } E(\Phi). \end{array} \right\}$ |
| 2) | $\text{IK}(\Phi) = \left\{ (A, x) / \right.$ | $\left. \begin{array}{l} \text{Je zwei } T_O\text{-verschiedene Punkte haben} \\ \text{die Eigenschaft } E(\Phi). \end{array} \right\}$ |

Beispiele hierfür bringen wir im nächsten Kapitel.

Kapitel IV : Epireflektive Unterkategorien der Kategorie der topologischen Räume

1. Bemerkungen zur T_0 -Reflexion

Für jeden topologischen Raum $(X, \mathcal{X})$ ist die T_0 -Reflexion $r_0: (X, \mathcal{X}) \longrightarrow (X_0, \mathcal{X}_0)$, $r_0(x) = r_0(y) \iff \overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$, initial, final und offen. Sie führt initial-Familien in initial-Familien über, denn für eine initial-Familie $f_i: (X, \mathcal{X}) \longrightarrow (Y_i, \mathcal{Y}_i)$ ist $\mathcal{X}_0 = t_*(r_0)(\mathcal{X}) = t_*(r_0)(\inf t^*(f_i)(\mathcal{Y}_i)) = t_*(r_0)(\inf t^*(r_{i0} \circ f_i)(\mathcal{Y}_{i0})) = t_*(r_0)(\inf t^*(f_{i0} \circ r_0)(\mathcal{Y}_{i0})) = t_*(r_0)(t^*(r_0)(\inf t^*(f_{i0})(\mathcal{Y}_{i0}))) = \inf t^*(f_{i0})(\mathcal{Y}_{i0})$.

Nach Satz 3.3.8. ist durch $\mathcal{S}_X^0 := \{(x, y) / \overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}\}$ die Familie $(\mathcal{S}_X^0)$ der Strukturabbildungen eines topologischen Punkt-Separators $P^0: \text{Ens}^t \longrightarrow \text{Ens}^r$ definiert. Nach dem Hauptsatz 2.2.2. von Wyler besitzt P^0 einen gelifteten linksadjungierten Funktor $T^0: \text{Ens}^r \longrightarrow \text{Ens}^t$. T^0 bildet Ens^r auf eine cotopologische bzw. coreflektive Unterkategorie $T^0\text{Ens}^r$ von Ens^t ab.

4.1.1. Satz: $T^0\text{Ens}^r =$ indiskret erzeugte Räume

Beweis: Die Coreflexion $T^0\text{Ens}^r \longrightarrow \text{Ens}^t$ ist gegeben durch $1_X: (X, \tau^0 \mathcal{S}^0 \mathcal{X}) \longrightarrow (X, \mathcal{X})$. Also ist $(X, \mathcal{X}) \in T^0\text{Ens}^r$ genau dann, wenn $\mathcal{X} = \tau^0 \mathcal{S}^0 \mathcal{X} = \inf \{\mathcal{Y} / \mathcal{S}^0 \mathcal{Y} = \mathcal{S}^0 \mathcal{X}\}$ ist. Um $\tau^0 \mathcal{S}^0 \mathcal{X}$ zu erhalten, haben wir zu $\mathcal{X}$ möglichst viele Mengen als offen hinzuzunehmen, ohne daß sich $\mathcal{S}^0 \mathcal{X}$ ändert. Dies legt die folgende Definition nahe

$$\mathcal{X}^0 := \left\{ 0 / \begin{array}{l} \text{Für alle } x \in 0, y \notin 0 \text{ gibt es } 0_{xy} \in \mathcal{X} \text{ mit} \\ (x \in 0_{xy}, y \notin 0_{xy} \text{ oder } x \notin 0_{xy}, y \in 0_{xy}). \end{array} \right\}.$$

Man überzeugt sich leicht, daß $\mathcal{X}^0$ die vorstehende Infimums-

eigenschaft hat, also ist $\mathcal{X}^0 = \tau^0 \circ \mathcal{X}$. Mit $0 \in \tau^0 \circ \mathcal{X}$ ist auch $X \setminus 0 \in \tau^0 \circ \mathcal{X}$. In $\tau^0 \circ \mathcal{X}$ ist daher jede offene Menge abgeschlossen. Nach Herrlich [4] sind hierdurch die indiskret erzeugten Räume charakterisiert, folglich ist $T^0 \text{Ens}^r \subset$ indiskret erzeugte Räume. Für einen indiskret erzeugten Raum $(X, \mathcal{X})$ ist $\tau^0 \circ \mathcal{X} = \mathcal{X}$, denn sei $0 \in \tau^0 \circ \mathcal{X}$. Zu allen $x \in 0$, $y \notin 0$ gibt es ein $0_{xy} \in \mathcal{X}$ mit $x \in 0_{xy}$, $y \notin 0_{xy}$. Dann ist $0 = \bigcap_{y \notin 0} 0_y$ mit $0_y := \bigcup_{x \in 0} 0_{xy}$. Da jede offene (abgeschlossene) Menge abgeschlossen (offen) ist, ist $0 \in \mathcal{X}$.

4.1.2. Bemerkung: Führt man den Prozeß in der Kategorie Ens^u der uniformen Räume durch, so erhält man für $T^0 \text{Ens}^r$ die Unterkategorie aller Räume $(X, \mathcal{U})$, für die $\mathcal{U}$ ein Hauptfilter ist. Die Coreflexion ist $1_X: (X, [U^0]) \rightarrow (X, \mathcal{U})$, wobei $[U^0]$ der von der Menge $U^0 := \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$ erzeugte Hauptfilter ist.

2. Die Ens-iso-reflektive Hülle $\text{IQ}\mathcal{E}$

Die von Preuß in [13] gegebene Definition des total $\mathcal{E}$ -zusammenhangslosen Raumes läßt sich sofort auf beliebige Kategorien Ens^D ausdehnen.

4.2.1. Definition: Sei $(A, x) \in \text{Ens}^D$, $\mathcal{E} \subset \text{Ens}^D$. Durch

$\pi_A^{\mathcal{E}} x := \{(a, b) / \text{Für alle } f: (A, x) \rightarrow (E, e), (E, e) \in \mathcal{E}, \text{ ist } f(a) = f(b)\}$ ist eine Äquivalenzrelation auf A definiert. Die zu $a \in A$ gehörige Äquivalenzklasse $Q_a^{\mathcal{E}}$ heißt die $\mathcal{E}$ -Quasikomponente von a . Ein Raum (A, x) heißt total $\mathcal{E}$ -zusammenhangslos, wenn seine $\mathcal{E}$ -Quasikomponenten einelementig sind. Dies ist äquivalent damit, daß es eine Familie $(f_i: (A, x) \rightarrow (E_i, e_i))$ nach $\mathcal{E}$ gibt, die die Punkte von A trennt bzw. eine monofamilie ist. Da hierdurch die Räume aus $Q^{\mathcal{E}}$ charakterisiert sind, ist $Q^{\mathcal{E}}$ die Klasse der total $\mathcal{E}$ -zusammenhangslosen Räume.

Es läßt sich leicht zeigen, daß die natürliche Abbildung
 $r: (A, x) \longrightarrow (A / \pi_A^{\ell} x, p_*(r)(x))$ die $Q\ell$ -Reflexion von (A, x)
 ist. Hierzu ist äquivalent, daß die Äquivalenzrelationen
 $\pi_A^{\ell} x$ einen groben Punkt-Separator $\Pi^{\ell}: \text{Ens}^p \longrightarrow \text{Ens}^r$ mit
 $K(\Pi^{\ell}) = Q\ell$ definieren. Die $IQ\ell$ -Reflexion erhalten wir als
 den Ens-iso-Faktor der $Q\ell$ -Reflexion, also als
 $1_A: (A, x) \longrightarrow (A, p^*(r)(p_*(r)(x)))$.

Sei $\text{Ens}^p = \text{Ens}^t$, $(X, \mathcal{X}) \in \text{Ens}^t$. Die Struktur $\psi_{IQ\ell} \mathcal{X} :=$
 $t^*(r)(t_*(r)(\mathcal{X}))$ ist

$$\psi_{IQ\ell} \mathcal{X} = \left\{ 0 / \begin{array}{l} 0 \in \mathcal{X}, \text{ und } 0 \text{ ist Vereinigung} \\ \text{von } \ell\text{-Quasikomponenten.} \end{array} \right\}.$$

Für $\ell \neq T_0$ ist $Q\ell = \text{Ens}^t$. Wir setzen daher $\ell < T_0$ voraus. Dann
 ist $Q\ell < T_0$, und mit 3.4.7. folgt der Satz:

4.2.2. Satz: Sei $\ell < T_0$. Für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{X})$

ist $1_X: (X, \mathcal{X}) \longrightarrow (X, \psi_{IQ\ell} \mathcal{X})$ die $IQ\ell$ -Reflexion.

Insbesondere ist $\psi_{IQ\ell} \mathcal{X} = \psi_{IQ\ell} \psi_{IQ\ell} \mathcal{X}$, und die ℓ -Quasikomponenten von $(X, \mathcal{X})$ und $(X, \psi_{IQ\ell} \mathcal{X})$ stimmen überein. Durch anschließende T_0 -Reflexion erhält man die $Q\ell$ -Reflexion von $(X, \mathcal{X})$. Die ℓ -Quasikomponenten von $(X, \mathcal{X})$ sind die T_0 -Quasikomponenten von $(X, \psi_{IQ\ell} \mathcal{X})$.

Für $(X, \mathcal{X}) \in \text{Ens}^t$ sind äquivalent:

- 1) $(X, \mathcal{X}) \in IQ\ell$
- 2) Jede offene Menge ist Vereinigung von ℓ -Quasikomponenten.
- 3) Zu je zwei T_0 -verschiedenen Punkten $x, y \in X$ gibt es eine stetige Abbildung $f: (X, \mathcal{X}) \longrightarrow (E, e)$ mit $f(x) \neq f(y)$.
- 4) Die ℓ -Quasikomponenten stimmen überein mit den T_0 -Quasikomponenten.
- 5) Von je zwei T_0 -verschiedenen Punkten besitzt mindestens

einer eine $\mathcal{E}$ -offene Umgebung, die den anderen nicht enthält (vergleiche Preuß [11, 5.1.6.]).

4.2.3. Beispiel: Sei D_2 der zweielementige, diskrete Raum. Für $\mathcal{E} = \{D_2\}$ ist $Q\{D_2\}$ -total zusammenhangslose Räume. Die offen-abgeschlossenen Mengen von $(X, \mathcal{X})$ stehen in bijektiver Beziehung zu den stetigen Abbildungen $f: (X, \mathcal{X}) \longrightarrow D_2$. Die $Q\{D_2\}$ -Reflexion ist die Abbildung auf den Quotientenraum, gebildet nach der Äquivalenzrelation $\pi_X \mathcal{X} = \{(x, y) / \text{Jede offen-abgeschlossene Menge, die } x \text{ enthält, enthält auch } y\}$. Die $IQ\{D_2\}$ -Reflexion ist $1_X: (X, \mathcal{X}) \longrightarrow (X, \psi_{IQ\{D_2\}} \mathcal{X})$ mit $\psi_{IQ\{D_2\}} \mathcal{X} = \{O / O \in \mathcal{X}, \text{ und zu je zwei Punkten } x \in O, y \notin O \text{ gibt es eine offen-abgeschlossene Menge } O_{xy} \text{ mit } x \in O_{xy}, y \notin O_{xy}\}$.

3. Die Ens-iso-reflektive Hülle $ID\mathcal{E}$

4.3.1. Definitionen und Sachverhalte aus [9], [12] und [14]:
Preuß nennt einen topologischen Raum $(X, \mathcal{X})$ $\mathcal{E}$ -zusammenhängend, wenn jede stetige Abbildung $f: (X, \mathcal{X}) \longrightarrow (E, e)$, $(E, e) \in \mathcal{E}$, konstant ist. Er erhält so eine Verallgemeinerung des klassischen Zusammenhangsbegriffs, der sich für $\mathcal{E} = \{D_2\}$ ergibt. Jeder topologische Raum läßt sich eindeutig in maximale $\mathcal{E}$ -zusammenhängende Teilmengen, die $\mathcal{E}$ -Zusammenhangskomponenten, zerlegen. Ein Raum heißt $\mathcal{E}$ -diskontinuierlich, wenn seine $\mathcal{E}$ -Zusammenhangskomponenten einelementig sind. Die $\mathcal{E}$ -diskontinuierlichen Räume bilden eine Unterkategorie $D\mathcal{E}$, die abgeschlossen gegenüber mono-Objekten und damit extrem epi-reflektiv ist. Es ist $Q\mathcal{E} \subset D\mathcal{E}$. Für $\mathcal{E} \neq T_0$ ist $D\mathcal{E} = \text{Ens}^t$, so daß o.B.d.A. $\mathcal{E} \subset T_0$ angenommen werden kann. Die $D\mathcal{E}$ -Reflexion ist die natürliche Abbildung $\omega_{\mathcal{E}}: (X, \mathcal{X}) \longrightarrow (X/R_{\mathcal{E}}, t_*(\omega_{\mathcal{E}})(\mathcal{X}))$, wobei $R_{\mathcal{E}}$ die durch die Zerlegung von X in die

ℓ -Zusammenhangskomponenten definierte Äquivalenzrelation ist. Speziell für $\ell = T_0$ ist $QT_0 = T_0 = DT_0$, so daß die T_0 -Quasikomponenten mit den T_0 -Zusammenhangskomponenten übereinstimmen. Da ein Raum genau dann T_0 -zusammenhängend ist, wenn er indiskret ist, gilt: Jeder Raum läßt sich in maximale indiskrete Teilmengen, die T_0 -Quasikomponenten, zerlegen.

Die $ID\ell$ -Reflexion erhalten wir als den Ens-iso-Faktor der $D\ell$ -Reflexion, also als $1_X: (X, \mathcal{X}) \longrightarrow (X, t^*(\omega_\ell)(t_*(\omega_\ell)(\mathcal{X})))$.

Die Struktur $\psi_{ID\ell}\mathcal{X} := t^*(\omega_\ell)(t_*(\omega_\ell)(\mathcal{X}))$ ist gegeben durch

$$\psi_{ID\ell}\mathcal{X} = \left\{ 0 / \begin{array}{l} 0 \in \mathcal{X}, \text{ und } 0 \text{ ist Vereinigung} \\ \text{von } \ell\text{-Zusammenhangskomponenten.} \end{array} \right\}.$$

Es folgt der Satz:

4.3.2. Satz: Sei $\ell \subset T_0$. Für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{X})$ ist $1_X: (X, \mathcal{X}) \longrightarrow (X, \psi_{ID\ell}\mathcal{X})$ die $ID\ell$ -Reflexion. Insbesondere ist $\psi_{ID\ell}\mathcal{X} = \psi_{ID\ell}\psi_{ID\ell}\mathcal{X}$, und die ℓ -Zusammenhangskomponenten von $(X, \mathcal{X})$ und $(X, \psi_{ID\ell}\mathcal{X})$ stimmen überein. Durch anschließende T_0 -Reflexion erhält man die $D\ell$ -Reflexion von $(X, \mathcal{X})$. Die ℓ -Zusammenhangskomponenten von $(X, \mathcal{X})$ sind die T_0 -Zusammenhangskomponenten von $(X, \psi_{ID\ell}\mathcal{X})$.

Für $(X, \mathcal{X}) \in \text{Ens}^t$ sind äquivalent:

- 1) $(X, \mathcal{X}) \in ID\ell$
- 2) Jede offene Menge ist Vereinigung von ℓ -Zusammenhangskomponenten.
- 3) Je zwei T_0 -verschiedene Punkte liegen in verschiedenen ℓ -Zusammenhangskomponenten.
- 4) Die ℓ -Zusammenhangskomponenten stimmen überein mit den T_0 -Zusammenhangskomponenten.

4. Beispiele epireflektiver Unterkategorien von Ens^t

Der "Verband" $\mathcal{W}$ der epireflektiven Unterkategorien von Ens^t zerfällt nach Satz 3.4.6. in zwei "isomorphe Unterverbände" $\mathcal{W}_1$ und $\mathcal{W}_2$, $\mathcal{W}_1$ bestehend aus den Ens-iso-reflektiven Unterkategorien, $\mathcal{W}_2$ aus den epireflektiven, nicht Ens-iso-reflektiven Unterkategorien. Wir führen zwei neue Raumklassen ein:

4.4.1. Definition: Ein Raum $(X, \mathcal{X})$ heißt ein R_{1a} -Raum, falls $(X, \mathcal{X}) \in \text{IT}_{2a}$ ist. $(X, \mathcal{X})$ heißt ein R_{1b} -Raum, falls $(X, \mathcal{X}) \in \text{IT}_{2b}$ ist (siehe 3.4.10.).

4.4.2. Satz: Unter der bijektiven Zuordnung von Satz 3.4.3. entsprechen sich insbesondere:

$\mathcal{W}_1$		$\mathcal{W}_2$
1) Ens^t	$\longleftrightarrow$	T_0 -Räume
2) R_0 -Räume	$\longleftrightarrow$	T_1 -Räume
3) R_1 -Räume	$\longleftrightarrow$	T_2 -Räume
4) R_{1a} -Räume	$\longleftrightarrow$	T_{2a} -Räume
5) R_{1b} -Räume	$\longleftrightarrow$	T_{2b} -Räume
6) T_3 -Räume	$\longleftrightarrow$	reguläre Räume
7) T_{3a} -Räume	$\longleftrightarrow$	vollständig reguläre Räume
8) nulldimensionale Räume	$\longleftrightarrow$	nulldimensionale T_0 -Räume
9) indiskrete Räume	$\longleftrightarrow$	höchstens einpunktige Räume

Beweis: 1), 2), 3), 6), 7), 8) und 9) gelten, da die links stehende Unterkategorie topologisch ist und ihr Schnitt mit den T_0 -Räumen die rechts stehende Unterkategorie ergibt.

4.4.3. Folgerungen:

- 1) Zwischen den sich nach dem Satz entsprechenden Unterkategorien liegt keine epireflektive Unterkategorie.

- 2) $\mathcal{W} \setminus \{\text{Ens}^t\}$ besitzt genau zwei maximale Elemente, und zwar die R_0 -Räume und die T_0 -Räume.
- 3) $\mathcal{W}_1 \setminus \{\text{Ind}\}$ besitzt ein kleinstes Element, und zwar die nulldimensionalen Räume.
- 4) Es ist
 - a) $\text{Ens}^t = R\{I_2 \pi S\}$ mit dem Sierpinski-Raum $S = (\{0,1\}, \{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\})$,
 - b) T_{3a} -Räume $= R\{I_2 \pi \mathcal{R}\} = R\{I_2 \pi [0,1]\}$,
 - c) nulldimensionale Räume $= R\{I_2 \pi D_2\}$.

Beweis: 1) folgt aus 3.4.5.

2) Es ist klar, daß T_0 maximal in $\mathcal{W} \setminus \{\text{Ens}^t\}$ ist. $\mathcal{W}_2 \setminus \{T_0\}$ besitzt genau ein maximales Element, und zwar die T_1 -Räume. Dies folgt daraus, daß der Sierpinski-Raum S die T_0 -Räume erzeugt. Da $\mathcal{W}_1$ und $\mathcal{W}_2$ "isomorph" sind, besitzt auch $\mathcal{W}_1 \setminus \{\text{Ens}^t\}$ ein größtes Element, nämlich die R_0 -Räume. Da $\mathcal{W}$ in $\mathcal{W}_1$ und $\mathcal{W}_2$ zerfällt, folgt dann 2).

3) Nach Herrlich [4] besitzt $\mathcal{W} \setminus \{P^t\}$ genau zwei minimale Elemente, und zwar Ind und die nulldimensionalen T_0 -Räume. Insbesondere besitzt $\mathcal{W}_2 \setminus \{P^t\}$ die nulldimensionalen T_0 -Räume als kleinstes Element. Da $\mathcal{W}_1$ und $\mathcal{W}_2$ "isomorph" sind, folgt dann 3).

4) Nach Mrówka [8] und Herrlich [4] gilt T_0 -Räume $= R\{S\}$, vollständig reguläre Räume $= R\{\mathcal{R}\} = R\{[0,1]\}$, nulldimensionale T_0 -Räume $= R\{D_2\}$. 4) folgt hieraus mit Satz 3.5.2.

4.4.4. Bemerkung: Nach Herrlich [4] gibt es zu jedem T_1 -Raum X einen regulären Raum Y , so daß $Y \notin R\{X\}$ ist. Nach Herrlich folgt hieraus sofort, daß die Kategorie der T_0 -Räume die kleinste von einem einzelnen Raum erzeugte epireflektive Unterkategorie von Ens^t ist, die die regulären Räume umfaßt. Diese Behauptung, nach der auch die T_3 -Räume nicht einfach

sind, ist zwar richtig, wie der folgende Satz zeigt, sie folgt aber nicht sofort aus dem angegebenen Sachverhalt. Aus diesem folgt nur, daß die Kategorie der T_0 -Räume die kleinste von einem einzelnen Raum erzeugte epireflektive Unterkategorie ist, die die regulären Räume umfaßt und die in den T_0 -Räumen enthalten ist. Das Problem besteht darin zu zeigen, daß es keinen R_0 -Raum X mit reguläre Räume $\subset R\{X\}$ gibt.

4.4.5. Satz: Die T_0 -Räume und Ens^t sind die beiden einzigen einfachen epireflektiven Unterkategorien von Ens^t , die die regulären Räume umfassen. Insbesondere sind die T_3^- , R_{1b}^- , R_{1a}^- , R_1^- und R_0 -Räume nicht einfach.

Beweis: Sei reguläre Räume $\subset R\{(X, \mathcal{X})\}$. Ist $R\{(X, \mathcal{X})\} \subset T_0$, so ist $R\{(X, \mathcal{X})\} = T_0$ nach der Bemerkung. Ist $R\{(X, \mathcal{X})\} \not\subset T_0$, so ist $R\{(X, \mathcal{X})\} \in \mathcal{M}_1$. Nach Satz 3.5.2. ist auch $R\{(X, \mathcal{X})\} \cap T_0$ einfach. Nach der Bemerkung ist dann $R\{(X, \mathcal{X})\} \cap T_0 = T_0$. Wegen der bijektiven Zuordnung von Satz 3.4.3. ist $R\{(X, \mathcal{X})\} = I(R\{(X, \mathcal{X})\} \cap T_0) = IT_0 = \text{Ens}^t$.

Eine epireflektive Unterkategorie $R\{(X, \mathcal{X}), (Y, \mathcal{Y})\}$ läßt sich nicht nur durch den Produktraum $(X, \mathcal{X}) \pi (Y, \mathcal{Y})$ erzeugen, sondern auch durch einen "kleineren" Raum, die einpunktige Verbindung $((X, \mathcal{X}), x_0) \vee ((Y, \mathcal{Y}), y_0) = (Xx\{y_0\}) \cup (\{x_0\}xY)$, genommen an den beliebigen Stellen $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. Die einpunktige Verbindung enthält nämlich $(X, \mathcal{X})$ und $(Y, \mathcal{Y})$ als Unterräume und ist ihrerseits ein Unterraum des Produktraums $(X, \mathcal{X}) \pi (Y, \mathcal{Y})$. Man erhält so, daß der dreielementige Raum $(\{a, b, c\}, \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\})$ die nulldimensionalen Räume und daß die dreielementigen Räume $(\{a, b, c\}, \{\emptyset, \{a\}, \{a, b, c\}\})$ (Mrówka [8]) und $(\{a, b, c\}, \{\emptyset, \{a, b\}, \{a, b, c\}\})$ die topologi-

schen Räume erzeugen. Für die übrigen dreielementigen Räume gilt: $R\{I_3\} = \text{Ind}$, $R\{D_3\} = \text{nulldimensionale } T_0\text{-Räume}$, und die Räume $(\{a, b, c\}, \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\})$, $(\{a, b, c\}, \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\})$, $(\{a, b, c\}, \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\})$, $(\{a, b, c\}, \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\})$ erzeugen die T_0 -Räume.

4.4.6. Satz: Jeder endliche topologische Raum $(X, \mathcal{X})$ erzeugt entweder die höchstens einpunktigen Räume P^t , die nulldimensionalen T_0 -Räume, die T_0 -Räume, die indis-kreten Räume, die nulldimensionalen Räume oder Ens^t . Genauer gilt die folgende vollständige Fallunterscheidung:

- 1) Enthält $(X, \mathcal{X})$ weder I_2 , D_2 noch S als Unterräume, so ist $R\{(X, \mathcal{X})\} = P^t$.
- 2) Enthält $(X, \mathcal{X})$ nur I_2 als zweielementigen Unterraum, so ist $R\{(X, \mathcal{X})\} = \text{Ind}$.
- 3) Enthält $(X, \mathcal{X})$ nur D_2 als zweielementigen Unterraum, so ist $R\{(X, \mathcal{X})\} = \text{nulldimensionale } T_0\text{-Räume}$.
- 4) Enthält $(X, \mathcal{X})$ I_2 und D_2 , aber nicht S als Unterräume, so ist $R\{(X, \mathcal{X})\} = \text{nulldimensionale Räume}$.
- 5) Enthält $(X, \mathcal{X})$ S , aber nicht I_2 als Unterraum, so ist $R\{(X, \mathcal{X})\} = T_0\text{-Räume}$.
- 6) Enthält $(X, \mathcal{X})$ S und I_2 als Unterräume, so ist $R\{(X, \mathcal{X})\} = \text{Ens}^t$.

Beweis: 1) trivial

2) $(X, \mathcal{X})$ ist dann auch indis-kret.

3) Sicher ist nulldimensionale T_0 -Räume $= R\{D_2\} \subset R\{(X, \mathcal{X})\}$.

$(X, \mathcal{X})$ ist ein T_0 -Raum. Damit $(X, \mathcal{X})$ nulldimensional ist, zeigen wir, daß jede offene Menge O abgeschlossen ist. Zu

$x \in O, y \notin O$ gibt es $O_{xy} \in \mathcal{X}$ mit $x \notin O_{xy}, y \in O_{xy}$. Es ist $X \setminus O = \bigcap_{x \in O} O_x$ mit $O_x := \bigcup_{y \notin O} O_{xy}$. Da X endlich ist, ist $X \setminus O$ offen.

4) Analog zu 3) folgt, daß $(X, \mathcal{X})$ nulldimensional ist.

5) und 6) sind klar. Sie gelten auch für unendliche Räume.

4.4.7. Bemerkung: Sei $X \setminus \mathcal{X} := \{X \setminus O \mid O \in \mathcal{X}\}$. Für einen endlichen Raum $(X, \mathcal{X})$ ist auch $(X, X \setminus \mathcal{X})$ ein endlicher Raum. Da $(X, X \setminus \mathcal{X}) \perp_2$ (bzw. D_2, S) genau dann als Unterraum enthält, wenn dies für $(X, \mathcal{X})$ gilt, folgt aus der vorstehenden Klassifizierung, daß $R\{(X, \mathcal{X})\} = R\{(X, X \setminus \mathcal{X})\}$ ist.

5. Die Reflexionen in die R_0 -Räume und die T_1 -Räume

4.5.1. Satz: Für $(X, \mathcal{X}) \in \text{Ens}^t$ sind äquivalent:

- 1) $(X, \mathcal{X}) \in IT_1$
- 2) Von je zwei T_0 -verschiedenen Punkten besitzt jeder eine Umgebung, in der der andere nicht liegt.
- 3) Für je zwei Punkte $x, y \in X$ gilt: Gibt es $O_x \in \mathcal{X}$ mit $x \in O_x, y \notin O_x$, so gibt es auch $O_y \in \mathcal{X}$ mit $y \in O_y, x \notin O_y$.
- 4) Durch $x \sim y \Leftrightarrow y \in \overline{\{x\}}$ ist eine Äquivalenzrelation definiert.
- 5) Die Mengen $\overline{\{x\}}, x \in X$, bilden eine Zerlegung von X . (Faktorisierung nach dieser Zerlegung ergibt dann die T_0 -Reflexion bzw. die T_1 -Reflexion)
- 6) Zu jeder abgeschlossenen Menge $A \subset X$ und jedem Punkt $x \notin A$ gibt es eine offene Menge O mit $x \notin O, A \subset O$.
- 7) Für jedes $x \in X$ ist der Filter $\mathcal{A}_x := \{Y \mid \text{Es gibt eine abgeschlossene Menge } A \text{ mit } x \in A \subset Y\}$ feiner als der Umgebungsfilter von x .
- 8) Jede offene Menge ist Vereinigung von abgeschlossenen Mengen.

- 9) Jede abgeschlossene Menge ist Durchschnitt von offenen Mengen.
- 10) Jede T_0 -Quasikomponente ist abgeschlossen.

Davis [2] benutzt die äquivalenten Eigenschaften 5) und 6) zur Definition der R_0 -Räume, so daß der Satz die R_0 -Räume charakterisiert. Die Äquivalenz von 1) und 2) folgt daraus, daß gilt: Ist $r: (X, \mathcal{X}) \longrightarrow (X, \mathcal{X})_{T_0}$ die T_0 -Reflexion, so ist $(X, \mathcal{X}) \in IT_1$ genau dann, wenn $(X, \mathcal{X})_{T_0} \in T_1$ ist. Es bereitet keine Schwierigkeiten, die Äquivalenz von 2) bis 10) zu zeigen. Mit den Sätzen 2.5.6., 3.4.7. und 4.4.2. folgt der Satz:

4.5.2. Satz: $1_X: (X, \mathcal{X}) \longrightarrow (X, \chi_X^0 \mathcal{X})$ mit

$$\chi_X^0 \mathcal{X} := \left\{ 0 / \begin{array}{l} 0 \in \mathcal{X}, \text{ und } 0 \text{ ist Vereinigung} \\ \text{von abgeschlossenen Mengen.} \end{array} \right\}$$

ist eine Ens-iso-Präreflexion für die R_0 -Räume.

Die R_0 -Reflexion läßt sich hieraus durch transfinite Konstruktion erhalten. Anschließende T_0 -Reflexion ergibt die T_1 -Reflexion.

4.5.3. Beispiel: Wir geben ein Beispiel dafür an, daß χ_X^0 nicht idempotent ist. Sei $X := \mathbb{N} \cup \{a\} \cup \{b\}$ und $\mathcal{X}$ die grösste Topologie, in der die Mengen $O := \mathbb{N} \cup \{a\}$, $O_M := (\mathbb{N} \setminus M) \cup \{b\}$ ($M \subset \mathbb{N}$ eine endliche Teilmenge) offen sind. Es ist $\chi_X^0 \mathcal{X} = \{\emptyset, O, X\}$, $\chi_X^0 \chi_X^0 \mathcal{X} = \{\emptyset, X\} = \omega_X$. Die R_0 -Reflexion von $(X, \mathcal{X})$ ist $1_X: (X, \mathcal{X}) \longrightarrow (X, \omega_X)$, die T_1 -Reflexion von $(X, \mathcal{X})$ ist die Abbildung auf den einelementigen Raum.

Nach Wyler [20] ist durch $\mathcal{S}_X^1 \mathcal{X} := \{(x, y) / y \in \overline{\{x\}}\}$ die Familie $(\mathcal{S}_X^1)$ der Strukturabbildungen eines Punkt-Separators p^1 für die T_1 -Räume definiert. Daher erhalten wir nach Kapitel III, Abschnitt 2, die folgende innere Charakterisierung der

T_1 -Reflexion:

4.5.4. Satz: Für einen Raum $(X, \mathcal{X})$ sei $\pi_X^1 \mathcal{X}$ die kleinste die Relation $\mathcal{S}_X^1 \mathcal{X}$ umfassende Äquivalenzrelation, also

$$\pi_X^1 \mathcal{X} = \left\{ (x, y) / \begin{array}{l} \text{Es gibt } x = x_1, x_2, \dots, x_n = y, \text{ so daß für} \\ i = 1, \dots, n-1 \text{ gilt: Es gilt nicht, daß} \\ \text{von } x_i \text{ und } x_{i+1} \text{ jeder eine Umgebung be-} \\ \text{sitzt, in der der andere nicht liegt.} \end{array} \right\}$$

Sei $s_{(X, \mathcal{X})}^1: (X, \mathcal{X}) \longrightarrow s^1(X, \mathcal{X}) := (X / \pi_X^1 \mathcal{X}, t_*(s^1)(\mathcal{X}))$ die Abbildung auf den Quotientenraum. $(s_{(X, \mathcal{X})}^1)$ ist eine extrem epi-Präreflexion für die T_1 -Räume. Die T_1 -Reflexion läßt sich durch transfinite Konstruktion aus $(s_{(X, \mathcal{X})}^1)$ erhalten.

4.5.5. Bemerkungen:

1) Der in Beispiel 4.5.3. angegebene Raum zeigt, daß $(s_{(X, \mathcal{X})}^1)$ im allgemeinen nicht idempotent ist. Für diesen Raum ist $s^1(X, \mathcal{X}) = S$ der Sierpinski-Raum und $s^1 s^1(X, \mathcal{X})$ der einelementige Raum.

2) Die Ens-iso-Präreflexion für die R_0 -Räume und die extrem epi-Präreflexion für die T_1 -Räume stehen in der Beziehung

$$\alpha_X^0 \mathcal{X} = t^*(s_{(X, \mathcal{X})}^1)(t_*(s_{(X, \mathcal{X})}^1)(\mathcal{X})).$$

4.5.6. Satz: Der Punkt-Separator P^1 ist topologisch. Ist

T^1 der zu P^1 linksadjungierte geliftete Funktor, so ist die zugehörige coreflektive Unterkategorie $T^1 \text{Ens}^r = \text{endlich-erzeugte Räume.}$

Beweis: Sei $(f_i: (X, \mathcal{X}) \longrightarrow (Y_i, \mathcal{Y}_i))_{i \in I}$ eine initial-Familie. Sicher ist $\mathcal{S}^1 \mathcal{X} \leq \inf r^*(f_i)(\mathcal{S}^1 \mathcal{Y}_i)$. Sei $(f_i(x), f_i(y)) \in \mathcal{S}^1 \mathcal{Y}_i$ für alle $i \in I, y \in O \in \mathcal{X}$. Da $\mathcal{X} = \inf t^*(f_i)(\mathcal{Y}_i)$ ist, gibt es $i_1, \dots, i_n \in I$ und $O_{i_k} \in \mathcal{Y}_{i_k}$ mit $y \in \bigcap_{k=1}^n f_{i_k}^{-1}[O_{i_k}] \subset O$. Dann ist

$f_{i_k}(y) \in O_{i_k}$ und folglich $f_{i_k}(x) \in O_{i_k}$. Damit ist $x \in \bigcap_{k=1}^n f_{i_k}^{-1}[O_{i_k}]$, also $x \in O$.

Die Coreflexion $\tau^1 \text{Ens}^r \rightarrow \text{Ens}^t$ ist $1_X: (X, \tau^1 \mathcal{S}^1 \mathcal{X}) \rightarrow (X, \mathcal{X})$ mit $\tau^1 \mathcal{S}^1 \mathcal{X} = \inf \{ \mathcal{U} / \mathcal{S}^1 \mathcal{U} = \mathcal{S}^1 \mathcal{X} \}$. Man überzeugt sich leicht, daß dieses Infimum gegeben ist durch $\tau^1 \mathcal{S}^1 \mathcal{X} = \{ O / \text{Für alle } x \in O, y \notin O \text{ gibt es } O_{xy} \in \mathcal{X} \text{ mit } x \in O_{xy}, y \notin O_{xy} \}$. Ist $(O_i)_{i \in I}$ eine Familie in $\tau^1 \mathcal{S}^1 \mathcal{X}$, so ist auch $\bigcap_{i \in I} O_i \in \tau^1 \mathcal{S}^1 \mathcal{X}$. Nach Herrlich [4] ist ein Raum genau dann endlich-erzeugt, wenn jeder Durchschnitt offener Mengen wieder offen ist, also ist $\tau^1 \text{Ens}^r \subset \text{endlich-erzeugte Räume}$. Für einen endlich-erzeugten Raum $(X, \mathcal{X})$ ist $\tau^1 \mathcal{S}^1 \mathcal{X} = \mathcal{X}$, denn $O \in \tau^1 \mathcal{S}^1 \mathcal{X}$ hat die Form $O = \bigcap_{y \notin O} O_y$ mit $O_y := \bigcup_{x \in O} O_{xy}$. Da $(X, \mathcal{X})$ endlich-erzeugt ist, ist dann $O \in \mathcal{X}$.

6. Die Reflexionen in die R_1 -Räume und die T_2 -Räume

4.6.1. Definition: Nach Davis [2] heißt ein Raum $(X, \mathcal{X})$ ein R_1 -Raum, wenn je zwei Mengen $\{\overline{x}\}, \{\overline{y}\}$ mit $\{\overline{x}\} \neq \{\overline{y}\}$ disjunkte Umgebungen besitzen.

4.6.2. Satz: Für $(X, \mathcal{X}) \in \text{Ens}^t$ sind äquivalent:

- 1) $(X, \mathcal{X})$ ist ein R_1 -Raum.
- 2) $(X, \mathcal{X})$ ist ein IT_2 -Raum.
- 3) Je zwei T_0 -verschiedene Punkte besitzen disjunkte Umgebungen.
- 4) Jede offene Menge O hat die Eigenschaft:
Je zwei Punkte $x \in O, y \notin O$ besitzen disjunkte Umgebungen.
- 5) Kein Filter auf X konvergiert gegen zwei T_0 -verschiedene Punkte.

Die Äquivalenz von 1) und 2) gilt bereits nach Davis [2] und Wyler [20]. Zum Beweis benutze man, daß die T_0 -Reflexion

$r_0: (X, \mathcal{X}) \longrightarrow (X, \mathcal{X})_{T_0}$ offen ist und nach Satz 3.4.7. $(X, \mathcal{X}) \in IT_2$ genau dann ist, wenn $(X, \mathcal{X})_{T_0} \in T_2$ ist.

Analog zu dem Satz 4.5.2. für die R_0 -Räume gilt hier:

4.6.3. Satz: $1_X: (X, \mathcal{X}) \longrightarrow (X, \chi_X^1 \mathcal{X})$ mit

$$\chi_X^1 \mathcal{X} := \left\{ 0 / \begin{array}{l} 0 \in \mathcal{X}, \text{ und je zwei Punkte } x \in 0, y \notin 0 \\ \text{besitzen disjunkte Umgebungen.} \end{array} \right\}$$

ist eine Ens-iso-Präreflexion für die R_1 -Räume.

Die R_1 -Reflexion läßt sich hieraus durch transfinite Konstruktion erhalten. Anschließende T_0 -Reflexion ergibt die T_2 -Reflexion.

Der folgende Satz greift das Problem (5) von Herrlich [5] auf, eine innere Charakterisierung der T_2 -Reflexion anzugeben. Nach [18] ist durch $\mathcal{S}_X^2 \mathcal{X} := \{(x, y) / x \text{ und } y \text{ besitzen keine disjunkten Umgebungen}\}$ ein Punkt-Separator P^2 für die T_2 -Räume definiert. Daher gilt nach Kapitel III, Abschnitt 2:

4.6.4. Satz: Für einen Raum $(X, \mathcal{X})$ sei $\pi_X^2 \mathcal{X}$ die kleinste die Relation $\mathcal{S}_X^2 \mathcal{X}$ umfassende Äquivalenzrelation, also

$$\pi_X^2 \mathcal{X} = \left\{ (x, y) / \begin{array}{l} \text{Es gibt } x = x_1, \dots, x_n = y, \text{ so daß für} \\ i = 1, \dots, n-1 \text{ gilt: } x_i \text{ und } x_{i+1} \text{ be-} \\ \text{sitzen keine disjunkten Umgebungen.} \end{array} \right\}$$

Sei $s_{(X, \mathcal{X})}^2: (X, \mathcal{X}) \longrightarrow s^2(X, \mathcal{X}) := (X / \pi_X^2 \mathcal{X}, t_*(s^2)(\mathcal{X}))$ die Abbildung auf den Quotientenraum. $(s_{(X, \mathcal{X})}^2)$ ist eine extrem epi-Präreflexion für die T_2 -Räume. Die T_2 -Reflexion läßt sich durch transfinite Konstruktion aus $(s_{(X, \mathcal{X})}^2)$ erhalten.

4.6.5. Bemerkungen:

1) Die Ens-iso-Präreflexion für die R_1 -Räume und die extrem epi-Präreflexion für die T_2 -Räume stehen in der Beziehung

$$\alpha_X^1 \mathcal{X} = \tau^*(s_{(X, \mathcal{X})}^2)(t_*(s_{(X, \mathcal{X})}^2)(\mathcal{X})).$$

2) In [18] geben Sharpe, Beattie und Marsden einen Raum $(X, \mathcal{X})$ an, für den $(X/\pi_X^2 \mathcal{X}, t_*(s^2)(\mathcal{X}))$ kein T_2 -Raum sein soll. Dies trifft jedoch nicht zu, denn mit den Bezeichnungen aus [18] gilt: Für $q_a \in S'$ sind die Mengen $X \setminus \{p_a, q_a\}$ und $X \setminus \{p_{-a}, q_a\}$ offen. Dann ist auch ihre Vereinigung $X \setminus \{q_a\}$ offen. $X \setminus \{q_a\}$ ist die Vereinigung der Äquivalenzklassen S und $\{q_b\}$, $q_b \neq q_a$. Also besitzen S und $\{q_a\}$ disjunkte Umgebungen im Quotientenraum.

Wir geben nun einen Raum $(X, \mathcal{X})$ an, für den $(X/\pi_X^2 \mathcal{X}, t_*(s^2)(\mathcal{X}))$ kein T_2 -Raum ist. Sei $X := Y \cup \{a\}$ mit $Y := \mathbb{N} \times \{1, 2\}$ und $\mathcal{X}$ die von den Mengen $O_{n1} := \{(m, 1) \mid m \geq n\} \cup \{a\}$, $O_{n2} := \{(m, 1) \mid 1 \leq m \leq n\} \cup \{(n, 2)\}$, $n \in \mathbb{N}$, erzeugte Topologie. $(X, \mathcal{X})$ besitzt genau zwei Äquivalenzklassen, und zwar Y und $\{a\}$. Da $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} O_{n2}$ offen ist, ist dann $s^2(X, \mathcal{X}) = S$ der Sierpinski-Raum. Die T_2 -Reflexion von $(X, \mathcal{X})$ ist die Abbildung auf den einelementigen Raum. Wegen 1) zeigt dieses Beispiel auch, daß die Ens-iso-Präreflexion für die R_1 -Räume im allgemeinen nicht idempotent ist. Es ist $\alpha_X^1 \mathcal{X} = \{\emptyset, Y, X\}$ und $\alpha_X^1 \alpha_X^1 \mathcal{X} = \{\emptyset, X\} = \omega_X$. Die R_1 -Reflexion von $(X, \mathcal{X})$ ist $1_X: (X, \mathcal{X}) \longrightarrow (X, \omega_X)$.

7. Die Reflexionen in die R_{1a} -Räume und die T_{2a} -Räume

Analog zu den R_0 - und den T_1 -Räumen, den R_1 - und den T_2 -Räumen gelten für die R_{1a} - und die T_{2a} -Räume die Sätze:

4.7.1. Satz: Für $(X, \mathcal{X}) \in \text{Ens}^t$ sind äquivalent:

- 1) $(X, \mathcal{X}) \in R_{1a}$
- 2) Je zwei T_0 -verschiedene Punkte besitzen disjunkte, abgeschlossene Umgebungen.
- 3) Jede offene Menge O hat die Eigenschaft:

Je zwei Punkte $x \in O$, $y \notin O$ besitzen disjunkte abgeschlossene Umgebungen.

4.7.2. Satz: $1_X: (X, \mathcal{X}) \longrightarrow (X, \alpha_X^{1a} \mathcal{X})$ mit

$$\alpha_X^{1a} \mathcal{X} := \left\{ O / \begin{array}{l} O \in \mathcal{X}, \text{ und je zwei Punkte } x \in O, y \notin O \text{ be-} \\ \text{sitzen disjunkte abgeschlossene Umgebungen} \end{array} \right\}$$

ist eine Ens-iso-Präreflexion für die R_{1a} -Räume.

Die R_{1a} -Reflexion läßt sich hieraus durch transfinite Konstruktion erhalten. Anschließende T_0 -Reflexion ergibt die T_{2a} -Reflexion.

4.7.3. Satz: Durch $s_X^{2a} \mathcal{X} := \{(x, y) / x \text{ und } y \text{ besitzen keine disjunkten abgeschlossenen Umgebungen}\}$ ist ein Punkt-Separator p^{2a} für die T_{2a} -Räume definiert. Die T_{2a} -Reflexion läßt sich durch transfinite Konstruktion aus der zu dem strengen Punkt-Separator $p^{2a\ddot{a}r}$ gehörigen extrem epi-Präreflexion $(s_{(X, \mathcal{X})}^{2a})$ erhalten.

8. Die Reflexionen in die T_3 -Räume und die regulären Räume

Die Reflexion in die T_3 -Räume ist von Thomas [19] untersucht worden. Für jede Teilmenge A eines Raumes $(X, \mathcal{X})$ definiert er eine Ultrahülle $Ucl A$ als den Durchschnitt aller A umfassenden, abgeschlossenen Mengen B mit der Eigenschaft, daß jedes $x \in X \setminus B$ und B disjunkte offene Umgebungen besitzen. Ucl ist ein Kuratowskischer Hüllenoperator und bestimmt daher eine Topologie $\mathcal{X}_3$.

Um $\mathcal{X}_3$ zu bestimmen, definieren wir auf naheliegende Weise eine Topologie $\alpha_X^3 \mathcal{X}$ und zeigen, daß der zugehörige Hüllenoperator mit dem Ultrahüllenoperator übereinstimmt. $(X, \mathcal{X})$ ist ein T_3 -Raum genau dann, wenn für jeden Punkt die abgeschlossenen Umgebungen eine Umgebungsbasis bilden. Dies ist

äquivalent damit, daß jede offene Menge O die Eigenschaft hat:

Zu jedem $x \in O$ gibt es $O_x \in \mathcal{X}$ mit $x \in O_x \subset \overline{O_x} \subset O$.

Wir setzen $\alpha_X^3 \mathcal{X} := \{O \mid O \text{ hat diese Eigenschaft}\}$.

Es ist leicht zu zeigen, daß $1_X: (X, \mathcal{X}) \longrightarrow (X, \alpha_X^3 \mathcal{X})$ eine

Ens-iso-Präreflexion für die T_3 -Räume ist.

4.8.1. Satz: Für $A \subset X$ ist $\text{Ucl } A = \overline{A}^{\alpha_X^3 \mathcal{X}}$, wobei $\overline{A}^{\alpha_X^3 \mathcal{X}}$ die abgeschlossene Hülle von A bezüglich $\alpha_X^3 \mathcal{X}$ ist.

Folglich ist $\mathcal{X}_3 = \alpha_X^3 \mathcal{X}$.

Beweis: $\text{Ucl } A$ ist abgeschlossen bezüglich $\alpha_X^3 \mathcal{X}$, da gilt:

Ist $x \in X \setminus \text{Ucl } A$, so besitzen x und $\text{Ucl } A$ disjunkte offene Umgebungen O_x und $O_{\text{Ucl } A}$, denn auch $\text{Ucl } A$ hat die Eigenschaft,

die die Mengen B erfüllen, deren Durchschnitt $\text{Ucl } A$ ist. Dann

ist $x \in O_x \subset \overline{O_x} \subset X \setminus O_{\text{Ucl } A} \subset X \setminus \text{Ucl } A$. Es folgt $\overline{A}^{\alpha_X^3 \mathcal{X}} \subset \text{Ucl } A$.

Es ist $\text{Ucl } A \subset \overline{A}^{\alpha_X^3 \mathcal{X}}$, da $\overline{A}^{\alpha_X^3 \mathcal{X}}$ unter den B vorkommt, deren

Durchschnitt $\text{Ucl } A$ ist. Denn wegen $\mathcal{X} \subset \alpha_X^3 \mathcal{X}$ ist $X \setminus \overline{A}^{\alpha_X^3 \mathcal{X}} \in \mathcal{X}$,

und ist $x \in X \setminus \overline{A}^{\alpha_X^3 \mathcal{X}}$, so gibt es $O_x \in \mathcal{X}$ mit $x \in O_x \subset \overline{O_x} \subset X \setminus \overline{A}^{\alpha_X^3 \mathcal{X}}$.

Dann sind O_x und $X \setminus \overline{O_x}$ disjunkte Umgebungen von x und $\overline{A}^{\alpha_X^3 \mathcal{X}}$.

Nach Thomas ist α_X^3 im allgemeinen nicht idempotent, und die

T_3 -Reflexion erhält man durch transfinite Konstruktion. Nach

Satz 3.4.7. ergibt anschließende T_0 -Reflexion die Reflexion

in die regulären Räume.

9. Die Reflexionen in die nulldimensionalen Räume und die nulldimensionalen T_0 -Räume

Ein Raum $(X, \mathcal{X})$ heißt nulldimensional, wenn jede offene Menge Vereinigung von offen-abgeschlossenen Mengen ist.

4.9.1. Satz: Die Reflexion in die nulldimensionalen Räume

ist $1_X: (X, \mathcal{X}) \longrightarrow (X, \psi_X^{\text{nd}} \mathcal{X})$ mit

$$\psi_X^{\text{nd}} \mathcal{X} := \left\{ 0 / \begin{array}{l} 0 \text{ ist Vereinigung von offen-} \\ \text{abgeschlossenen Mengen} \end{array} \right\} .$$

Die Reflexion in die nulldimensionalen T_0 -Räume ist die natürliche Abbildung

$$r: (X, \mathcal{X}) \longrightarrow (X/\pi_X^{\text{nd}} \mathcal{X}, t_*(r)(\psi_X^{\text{nd}} \mathcal{X})).$$

Hierbei ist $\pi_X^{\text{nd}} \mathcal{X}$ die Äquivalenzrelation

$$\pi_X^{\text{nd}} \mathcal{X} := \left\{ (x, y) / \begin{array}{l} \text{Jede offen-abgeschlossene Menge,} \\ \text{die } x \text{ enthält, enthält auch } y. \end{array} \right\}$$

Beweis: Man zeigt, daß (ψ_X^{nd}) eine idempotente Ens-iso-Prä-reflexion für die nulldimensionalen Räume ist. Die Idempotenz folgt daraus, daß $\mathcal{X}$ und $\psi_X^{\text{nd}} \mathcal{X}$ dieselben offen-abgeschlossenen Mengen besitzen. Die Reflexion in die nulldimensionalen T_0 -Räume ergibt sich durch anschließende T_0 -Reflexion.

4.9.2. Bemerkung: Der Satz gibt die Reflexionen nach $I\{D_2\}$ und $R\{D_2\}$ an. Die Reflexionen nach $Q\{D_2\}$ und $IQ\{D_2\}$ sind unter 4.2.3. behandelt.

Kapitel V : Die einer rechts-Bikategoriestruktur zugeordnete topologische Kategorie

Dieses Kapitel ist eine Fortsetzung von Kapitel I. Während wir bisher topologische Kategorien als Spezialfälle von rechts-Bikategorien behandelt haben, benutzen wir nun den Begriff der topologischen Kategorie zur Untersuchung von rechts-Bikategoriestrukturen. Wir ordnen einer rechts-Bikategoriestruktur eine topologische Kategorie zu, so daß wir die Begriffe und Sätze aus der Theorie der topologischen Kategorien anwenden können.

1. Definition der topologischen Kategorie $\mathcal{C}_\ell^P$

$\mathcal{C}$ sei eine P-colokal kleine (I,P)-rechts-Bikategorie mit Produkten. $f = f_1^I \cdot f_0^P = f_1 \cdot f_0$ bezeichne die (I,P)-Faktorisierung eines Morphismus f . Sei $\ell \subset \mathcal{C}$. Wir lassen nur solche Klassen ℓ zu, für die die Klasse

$$A_\ell^P := \left\{ h / \begin{array}{l} h \text{ ist der P-Faktor der (I-Familien,P)-Faktori-} \\ \text{sierung eines Pinsels } (f_i: A \longrightarrow E_i) \text{ mit } E_i \in \ell. \end{array} \right\} \\ = \{ h / h: A \longrightarrow B \text{ mit } B \in P\ell \text{ und } h \in P \}$$

für jedes Objekt $A \in \mathcal{C}$ nicht leer ist. Zwei Morphismen $h_1, h_2 \in A_\ell^P$ betrachten wir als gleich, wenn es einen Isomorphismus k mit $k \cdot h_1 = h_2$ gibt, und schreiben dann auch $h_1 = h_2$. Hierbei ist darauf zu achten, daß die im folgenden durchgeführten Konstruktionen wohldefiniert sind. Daß ℓ P-colokal klein ist, besagt gerade, daß A_ℓ^P für jedes ℓ eine Menge ist. Wir definieren eine Ordnung $\leq$ auf A_ℓ^P durch $h_1 \leq h_2 \Leftrightarrow$ Es gibt einen Morphismus k mit $k \cdot h_1 = h_2$.

5.1.1. Lemma: Besitzt $\mathcal{C}$ verallgemeinerte Pushouts, so ist A_ℓ^P ein vollständiger Verband.

Beweis: Die $P\ell$ -Reflexion von A ist das kleinste Element in A_{ℓ}^P . Sei $(h_i: A \rightarrow B_i)$ eine Familie in A_{ℓ}^P . Aus der $(I\text{-Familien}, P)\text{-Diagonalbedingung}$ folgt, daß der P -Faktor in der $(I\text{-Familien}, P)\text{-Faktorisierung}$ von (h_i) das Infimum der Familie (h_i) ist. Es bleibt zu zeigen, daß das Supremum von A_{ℓ}^P existiert. Zu der Familie $(h: A \rightarrow B_h)_{h \in A_{\ell}^P}$ existiert das verallgemeinerte Pushout $(g_h: B_h \rightarrow C)$. Setze $g := g_h \cdot h: A \rightarrow C$. Damit $g = \sup A_{\ell}^P$ ist, ist zu zeigen a) $g \in P$ und b) $C \in P\ell$.

a) Sei $g = g_1 \cdot g_0$. Aus der $(I, P)\text{-Diagonalbedingung}$ folgt die Existenz von l_h mit $l_h \cdot h = g_0$ und $g_1 \cdot l_h = g_h$. Aus der universellen Eigenschaft der Familie (g_h) folgt die Existenz von l mit $l \cdot g_h = l_h$. Für alle $h \in A_{\ell}^P$ ist $g_1 \cdot l \cdot g_h = g_h$ und daher $g_1 \cdot l = 1_C$. Sei $h \in A_{\ell}^P$ fest gewählt. Es ist $l \cdot g_1 \cdot g_0 = l \cdot g = l \cdot g_h \cdot h = l_h \cdot h = g_0$ und folglich $l \cdot g_1 = 1$. Damit ist g_1 ein Isomorphismus.

b) Sei $\alpha_C: C \rightarrow C_{P\ell}$ die $P\ell$ -Reflexion von C . Dann ist $h := \alpha_C \cdot g \in A_{\ell}^P$, und es ist $g_{\alpha_C \cdot g} \cdot \alpha_C \cdot g = g$. Wegen a) folgt $g_{\alpha_C \cdot g} \cdot \alpha_C = 1_C$. Da α_C außerdem ein Epimorphismus ist, ist α_C ein Isomorphismus.

Für eine beliebige Familie $(h_i: A \rightarrow B_i)$ in A_{ℓ}^P ist das Supremum zwar nicht durch $g := g_i \cdot h_i$ gegeben, wobei $(g_i: B_i \rightarrow C)$ das verallgemeinerte Pushout von (h_i) ist, sondern es ist $\sup h_i = \alpha_C \cdot g$.

Beweis: Wie unter a) ist $g \in P$ und damit $h_i \leq \alpha_C \cdot g$. Sei $h_i \leq m$. Es gibt m_i mit $m_i \cdot h_i = m$. Aus der universellen Eigenschaft der Familie (g_i) folgt die Existenz von n mit $n \cdot g_i = m_i$. Aus der Reflexionseigenschaft von α_C folgt die Existenz von $\bar{n}$ mit $\bar{n} \cdot \alpha_C = n$. Dann ist $\bar{n} \cdot \alpha_C \cdot g = m$, also $\alpha_C \cdot g \leq m$.

Im folgenden besitze ℓ immer verallgemeinerte Pushouts.

5.1.2. Satz: Durch $P_{\mathcal{E}}^*A := A_{\mathcal{E}}^P$ und $P_{\mathcal{E}}^*(f)(1) := (1 \circ f)_0^P$ für
 $f: A \longrightarrow B$, $1 \in P_{\mathcal{E}}^*B$ ist eine topologische Theorie
 $P_{\mathcal{E}}^*: \mathcal{C}^0 \longrightarrow \mathcal{C}_-$ definiert.

Beweis: Da $P_{\mathcal{E}}$ abgeschlossen gegenüber I-Unterobjekten ist, ist $P_{\mathcal{E}}^*(f)(1) \in P_{\mathcal{E}}^*A$. Aus der (I,P)-Diagonalbedingung folgt, daß $P_{\mathcal{E}}^*(f)$ monoton ist. Für $h \in P_{\mathcal{E}}^*A$ ist $P_{\mathcal{E}}^*(1_A)(h) = (h \circ 1_A)_0 = h_0 = h$. Für $f: A \longrightarrow B$, $g: B \longrightarrow C$, $m \in P_{\mathcal{E}}^*C$ ist $P_{\mathcal{E}}^*(g \circ f)(m) = (m \circ g \circ f)_0 = ((m \circ g)_0 \circ f)_0 = P_{\mathcal{E}}^*(f)(P_{\mathcal{E}}^*(g)(m))$, wie aus der Eindeutigkeit der (I,P)-Faktorisierung folgt. Damit $P_{\mathcal{E}}^*(f)$ Infima bewahrt, ist zu zeigen

- a) $P_{\mathcal{E}}^*(f)(\inf l_i) = \inf P_{\mathcal{E}}^*(f)(l_i)$ für jede nichtleere Familie $(l_i: B \longrightarrow C_i)$ in $P_{\mathcal{E}}^*B$
 - b) $P_{\mathcal{E}}^*(f)(\omega_B) = \omega_A$, wobei ω_A bzw. ω_B das Supremum von $P_{\mathcal{E}}^*A$ bzw. $P_{\mathcal{E}}^*B$ ist.
- a) Ist $P_{\mathcal{E}}^*(f)(l_i) = (l_i \circ f)_0 = h_i \circ h$ die (I-Familien,P)-Faktorisierung von $(P_{\mathcal{E}}^*(f)(l_i))$, so ist $h = \inf P_{\mathcal{E}}^*(f)(l_i)$. Ist $l_i = g_i \circ g$ die (I-Familien,P)-Faktorisierung von (l_i) , so ist $g = \inf l_i$ und $P_{\mathcal{E}}^*(f)(\inf l_i) = (g \circ f)_0$. Es sind $(g_i \circ (g \circ f)_1) \circ (g \circ f)_0 = l_i \circ f = ((l_i \circ f)_1 \circ h_i) \circ h$ zwei (I-Familien,P)-Faktorisierungen von $(l_i \circ f)$. Aus der Eindeutigkeit einer solchen Faktorisierung folgt $h = (g \circ f)_0$.
- b) Wähle g und l so, daß $g \circ \omega_A = l \circ f$ ein Pushout-Diagramm ist, $l: B \longrightarrow D$. Nach Kennison [7] ist mit $\omega_A \in P$ auch $l \in P$. Ist α_D die $P_{\mathcal{E}}$ -Reflexion von D , so ist $\alpha_D \circ l \in P_{\mathcal{E}}^*B$. Da $\omega_B = \sup P_{\mathcal{E}}^*B$ ist, gibt es m mit $\omega_B = m \circ \alpha_D \circ l$. Dann ist $(\omega_B \circ f)_1 \circ (\omega_B \circ f)_0 = \omega_B \circ f = m \circ \alpha_D \circ g \circ \omega_A$. Aus der (I,P)-Diagonalbedingung folgt die Existenz von n mit $n \circ \omega_A = (\omega_B \circ f)_0$. Also ist $\omega_A \leq P_{\mathcal{E}}^*(f)(\omega_B)$.

Die zu $P_{\mathcal{E}}^*$ gehörige topologische Kategorie $\mathcal{C}_{\mathcal{E}}^P$ bezeichnen wir mit $\mathcal{C}_{\mathcal{E}}^P$. $f: (A, h) \longrightarrow (B, l)$ ist stetig genau dann, wenn

es einen Morphismus k mit $k \cdot h = (1 \cdot f)_0$ gibt. Mit der (I, P) -Diagonalbedingung folgt, daß dies äquivalent zu der Existenz eines Morphismus g mit $g \cdot h = 1 \cdot f$ ist.

5.1.3. Bemerkung: Sei $f: A \rightarrow B$, $h \in P_\ell^* A$. Die finale Struktur von h unter f ist $P_{\ell*}(f)(h) = \alpha_D \cdot e$. Hierbei sind e und α_D dadurch bestimmt, daß $e \cdot f = g \cdot h$, $e: B \rightarrow D$, ein Pushout-Diagramm und α_D die P_ℓ -Reflexion von D ist.

Beweis: Da mit $h \in P$ auch $e \in P$ ist, ist $\alpha_D \cdot e \in P_\ell^* B$. Sicher ist $f: (A, h) \rightarrow (B, \alpha_D \cdot e)$ stetig. Ist $f: (A, h) \rightarrow (B, 1)$ stetig, so gibt es m mit $m \cdot h = 1 \cdot f$. Aus der Pushout-Eigenschaft folgt die Existenz von n mit $n \cdot g = m$ und $n \cdot e = 1$. Aus der Reflexionseigenschaft von α_D folgt die Existenz von $\bar{n}$ mit $\bar{n} \cdot \alpha_D = n$. Dann ist $\bar{n} \cdot \alpha_D \cdot e = 1$, also $\alpha_D \cdot e \leq 1$.

2. ℓ_ℓ^P in Abhängigkeit von ℓ

Für $\ell < f < \ell$ ist $P_\ell < P_f$ und damit $\ell_\ell^P < \ell_f^P$. Da P_ℓ^* eine topologische Theorie mit $P_\ell^* A < P_f^* A$ ist, ist ℓ_ℓ^P eine topologische Unterkategorie von ℓ_f^P . Die ℓ_ℓ^P -Reflexion von $(A, h) \in \ell_f^P$ ist nach 2.3.7. $1_A: (A, h) \rightarrow (A, \inf \{ 1 / 1 \in P_\ell^* A \text{ mit } h \leq 1 \})$. Dieses Infimum läßt sich explizit angeben, denn es gilt:

5.2.1. Satz: Die ℓ -iso-Reflexion $\ell_f^P \rightarrow \ell_\ell^P$ ist gegeben durch $1_A: (A, h) \rightarrow (A, \alpha_C^{P_\ell} \cdot h)$, wobei $\alpha_C^{P_\ell}$ die P_ℓ -Reflexion von C ist, $h: A \rightarrow C$. Ist insbesondere $h = \alpha_A^{P_f}$, so ist die ℓ_ℓ^P -Reflexion $1_A: (A, \alpha_A^{P_f}) \rightarrow (A, \alpha_A^{P_\ell})$.

Beweis: Setze $1' := \inf \{ 1 / 1 \in P_\ell^* A \text{ und } h \leq 1 \}$, $1': A \rightarrow D$, $D \in P_\ell$. Da $h \leq 1'$ ist, gibt es g mit $g \cdot h = 1'$ (der eigentliche Grund hierfür ist die $(I\text{-Familien}, P)$ -Diagonalbedingung). Aus der Reflexionseigenschaft von $\alpha_C^{P_\ell}$ folgt die Existenz von $\bar{g}$ mit

$\bar{g} \cdot \alpha_C^{Pf} = g$. Dann ist $\bar{g} \cdot \alpha_C^{Pf} \cdot h = 1'$, also $\alpha_C^{Pf} \cdot h \leq 1'$. Da $\alpha_C^{Pf} \cdot h$ unter den 1 vorkommt, deren Infimum $1'$ ist, ist auch $1' \leq \alpha_C^{Pf} \cdot h$.

5.2.2. Bemerkungen:

1) Durch $A \mapsto (A, 1_A)$ und $f: A \rightarrow B \mapsto f: (A, 1_A) \rightarrow (B, 1_B)$ ist eine volle Einbettung $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_\mathcal{P}^P$ definiert. Wir können daher $\mathcal{C}$ als Unterkategorie von $\mathcal{C}_\mathcal{P}^P$ auffassen. Dann gilt: $\mathcal{C}_\mathcal{P}^P$ ist die $\mathcal{C}$ -iso-reflektive Hülle von $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}$ in $\mathcal{C}_\mathcal{P}^P$.

Beweis: Da $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_\mathcal{P}^P$ ist, ist $I\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_\mathcal{P}^P$. Sei $(A, h: A \rightarrow C) \in \mathcal{C}_\mathcal{P}^P$. Da $C \in P\mathcal{E}$ ist, gibt es eine I-Familie $(f_i: C \rightarrow E_i)$ mit $E_i \in \mathcal{C}$. $(f_i \cdot h: (A, h) \rightarrow (E_i, 1_{E_i}))$ ist eine initial-Familie. Also ist $(A, h) \in I\mathcal{C}$.

2) Ist $\mathcal{B}$ eine P-reflektive Unterkategorie von $\mathcal{C}$, so ist $\mathcal{B}$ eine $\mathcal{C}$ -P-reflektive Unterkategorie von $\mathcal{C}_\mathcal{P}^P$. Die $\mathcal{B}$ -Reflexion von $(A, h: A \rightarrow C) \in \mathcal{C}_\mathcal{P}^P$ ist $\alpha_C^{\mathcal{B}} \cdot h: (A, h) \rightarrow (C_{\mathcal{B}}, 1_{C_{\mathcal{B}}})$.

Beweis: Es ist $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}_\mathcal{P}^P \subset \mathcal{C}_\mathcal{P}^P$. Wegen Satz 5.2.1. genügt es zu zeigen, daß für $(A, h) \in \mathcal{C}_\mathcal{P}^P$ $h: (A, h) \rightarrow (C, 1_C)$ eine $\mathcal{B}$ -Reflexion ist. Sei $f: (A, h) \rightarrow (B, 1_B)$ mit $B \in \mathcal{B}$ gegeben. Aus der Stetigkeit von f folgt die Existenz eines Morphismus $\bar{f}: (C, 1_C) \rightarrow (B, 1_B)$ mit $\bar{f} \cdot h = 1_B \cdot f = f$. Da $h \in P$ ist, ist $\bar{f}$ hierdurch eindeutig bestimmt.

3. $\mathcal{C}_\mathcal{P}^P$ in Abhängigkeit von P

(I, P) und (J, S) seien zwei rechts-Bikategoriestrukturen auf $\mathcal{C}$ derart, daß $P \subset S$ und $\mathcal{C}$ S-colokal klein ist. Dann ist $J \subset I$, $S\mathcal{E} \subset P\mathcal{E}$.

5.3.1. Satz: Durch $\varphi_A^m := m_O^P$ sind die Strukturabbildungen

$$\varphi_A: S_{\mathcal{E}}^* A \rightarrow P_{\mathcal{E}}^* A \text{ eines topologischen Funktors}$$

$\phi : \ell_{\ell}^S \longrightarrow \ell_{\ell}^P$ definiert.

Beweis: Zu zeigen ist a) φ_A ist monoton, b) φ_A bewahrt Infima, c) $\varphi_A \cdot S_{\ell}^*(f) = P_{\ell}^*(f) \cdot \varphi_B$ für $f: A \longrightarrow B$.

a) Aus der (I,P)-Diagonalbedingung folgt, daß mit $m \leq n$ auch $m_O^P \leq n_O^P$ ist.

b) Es ist $\varphi_A \omega_A^S = \omega_A^P$, da gilt: Sei $\omega_A^P: A \longrightarrow C$. Da $\alpha_C^{S_{\ell}} \cdot \omega_A^P \in S_{\ell}^*A$ ist, ist $\alpha_C^{S_{\ell}} \cdot \omega_A^P \leq \omega_A^S$. Da φ_A monoton ist, ist dann $\omega_A^P \leq (\alpha_C^{S_{\ell}} \cdot \omega_A^P)_O^P \leq \omega_{AO}^{SP} = \varphi_A \omega_A^S$. Sei nun (m_i) eine nichtleere Familie in S_{ℓ}^*A . Ist $m_i = n_i \cdot n$ die (J-Familien,S)-Faktorisierung von (m_i) , so ist $n = \inf m_i$. Da wegen $P < S$ jede J-Familie eine I-Familie ist, ist $m_i = (n_i \cdot n_1^I) \cdot n_O^P$ die (I-Familien,P)-Faktorisierung von (m_i) . Ist $m_{iO}^P = g_i \cdot g$ die (I-Familien,P)-Faktorisierung von (m_{iO}^P) , so ist $g = \inf \varphi_A m_i$. Es ist $m_i = (m_{i1}^I \cdot g_i) \cdot g$ eine weitere (I-Familien,P)-Faktorisierung von (m_i) . Also ist $n_O^P = g$, d.h. $\varphi_A \inf m_i = \inf \varphi_A m_i$.

c) Sei $n \in S_{\ell}^*B$. Es ist $\varphi_A S_{\ell}^*(f)(n) = \varphi_A (n \cdot f)_O^S = (n \cdot f)_{OO}^{SP} = (n \cdot f)_O^P$ und $P_{\ell}^*(f) \varphi_B n = (n_O^P \cdot f)_O^P = (n \cdot f)_O^P$.

Nach dem Hauptsatz 2.1.2. von Wyler besitzt ϕ einen gelifteten linksadjungierten Funktor $\gamma: \ell_{\ell}^P \longrightarrow \ell_{\ell}^S$. Die Strukturabbildungen $\psi_A: P_{\ell}^*A \longrightarrow S_{\ell}^*A$ von γ sind gegeben durch $\psi_A h = \inf \{ m \mid m \in S_{\ell}^*A \text{ und } h \leq \varphi_A m = m_O^P \}$. $\psi_A h$ läßt sich explizit angeben, denn es gilt:

5.3.2. Satz: Die Strukturabbildungen ψ_A des zu ϕ linksadjungierten Funktors γ sind dadurch bestimmt, daß für $h \in P_{\ell}^*A$, $h: A \longrightarrow C$, gilt $\psi_A h = \alpha_C^{S_{\ell}} \cdot h$.

Beweis: Da $C \in P_{\ell}$ ist, ist nach Satz 1.3.2. $\alpha_C^{S_{\ell}}$ ein I-Morphismus. Damit ist $\alpha_C^{S_{\ell}} \cdot h$ die (I,P)-Faktorisierung von $\alpha_C^{S_{\ell}} \cdot h \in S_{\ell}^*A$. Dann ist $\varphi_A \alpha_C^{S_{\ell}} \cdot h = (\alpha_C^{S_{\ell}} \cdot h)_O^P = h$ und folglich

$\psi_A h \leq \alpha_C^{S\ell} \circ h$. Sei $m \in S_\ell^* A$ mit $h \leq \varphi_A m$. Es gibt k mit $k \cdot h = m_0^P$. Aus der Reflexionseigenschaft von $\alpha_C^{S\ell}$ folgt die Existenz von k' mit $k' \cdot \alpha_C^{S\ell} = m_1^I \cdot k$. Dann ist $\alpha_C^{S\ell} \cdot h \leq m$. Es folgt $\psi_A h = \alpha_C^{S\ell} \circ h$.

5.3.3. Bemerkungen:

1) Da Φ und Ψ adjungiert sind, gilt für alle $(A, h) \in \mathcal{L}_\ell^P$, $(B, n) \in \mathcal{L}_\ell^S$, $f: A \rightarrow B$, daß $f: (A, h) \rightarrow (B, n_0^P)$ genau dann P_ℓ -stetig ist, wenn $f: (A, \alpha_C^{S\ell} \cdot h) \rightarrow (B, n)$ S_ℓ -stetig ist. Dies läßt sich auch direkt unter Benutzung der (I,P)- und (J,S)-Diagonalbedingung und der Reflexionseigenschaft von $\alpha_C^{S\ell}$ zeigen.

2) Nach Wyler [23] ist das Bild einer topologischen Kategorie unter einem costraffen Funktor eine cotopologische und damit coreflektive Unterkategorie. Daher ist in dem vorliegenden Fall $\Psi \mathcal{L}_\ell^P = \{(B, n) \mid (B, n) \in \mathcal{L}_\ell^S \text{ und } n_1^I \text{ ist eine } S_\ell\text{-Reflexion}\}$ eine coreflektive Unterkategorie von $\mathcal{L}_\ell^S$. Die Coreflexion von $(A, m) \in \mathcal{L}_\ell^S$ ist $\gamma_A: (A, \alpha_C^{S\ell} \cdot m_0^P) \rightarrow (A, m)$.

Literaturverzeichnis

- [1] Čech, E.: Topological spaces. Revised edition by Z. Frolík and M. Katětov. Interscience, London-New York-Sydney 1966
- [2] Davis, A.S.: Indexed systems of neighborhoods for general topological spaces. Amer. Math. Monthly 68, 886-893 (1961)
- [3] Herrlich, H.: $\mathbb{E}$ -kompakte Räume. Math. Z. 96, 228-255 (1967)
- [4] Herrlich, H.: Topologische Reflexionen und Coreflexionen. Lecture Notes in Mathematics 78. Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1968
- [5] Herrlich, H.: Categorical topology. General Topology and its Applications 1, 1-15 (1971)
- [6] Hušek, M.: S-categories. Comment. Math. Univ. Carolinae 5, 37-46 (1964)
- [7] Kennison, J.F.: Full reflective subcategories and generalized covering spaces. Illinois J. Math. 12, 353-365 (1968)
- [8] Mrówka, S.: Further results on E-compact spaces. I. Acta Math. 120, 161-185 (1968)
- [9] Preuß, G.: Über den $\mathbb{E}$ -Zusammenhang und seine Lokalisation. Dissertation. II. Math. Inst., Freie Universität Berlin (1967)
- [10] Preuß, G.: Eine Charakterisierung epireflektiver Unterkategorien einer Kategorie mit Inversionseigenschaft. manuscripta math. 1, 307-316 (1969)
- [11] Preuß, G.: Trennung und Zusammenhang. Monatsh. Math. 74, 70-87 (1970)

- [12] Preuß, G.: E-zusammenhängende Räume. manuscripta math. 3, 331-342 (1970)
- [13] Preuß, G.: Allgemeine Topologie I und II. Vorlesungsmanuskript. I. Math. Inst., Freie Universität Berlin (1971)
- [14] Preuß, G.: Eine Galois-Korrespondenz in der Topologie. Monatsh. Math. 75, 447-452 (1971)
- [15] Ramaley, J.F. und Wyler, O.: Cauchy spaces I. Structure and uniformization theorems. Math. Ann. 187, 175-186 (1970)
- [16] Ramaley, J.F. und Wyler, O.: Cauchy spaces II. Regular completions and compactifications. Math. Ann. 187, 187-199 (1970)
- [17] Schubert, H.: Topologie. Teubner, Stuttgart 1969
- [18] Sharpe, R., Beattie, M. und Marsden, J.: A universal factorization theorem in topology. Canad. Math. Bull. 9, 201-207 (1966)
- [19] Thomas, J.P.: Associated regular spaces. Canad. J. Math. 20, 1087-1092 (1968)
- [20] Wyler, O.: On categories in general topology. Dept. of Math., Carnegie Institute of Technology, Report 67-10, March 1967.
- [21] Wyler, O.: Ein Komplettierungsfunktor für uniforme Limesräume. Math. Nachrichten 46, 1-12 (1970)
- [22] Wyler, O.: On the categories of general topology and topological algebra. Archiv der Math. 22, 7-17 (1971)
- [23] Wyler, O.: Top categories and categorical topology. General Topology and its Applications 1, 17-28 (1971)

Lebenslauf

Am 25. August 1947 wurde ich als Sohn des Verwaltungsamtmanns Raimund Marny und dessen Ehefrau Gertrud geb. Dettmann in Lübeck geboren. Von 1954 bis 1960 besuchte ich die Grundschule, und zwar zunächst ein Jahr in Lübeck und dann fünf Jahre in Berlin. 1960 trat ich in die Herderschule in Berlin-Charlottenburg ein, eine Oberschule Wissenschaftlichen Zweiges. 1961 setzte ich meine Schulausbildung auf dem Alexander-von-Humboldt-Gymnasium in Konstanz fort und legte dort 1966 die Reifeprüfung ab.

Seit dem Wintersemester 1966/67 studiere ich an der Freien Universität Berlin Mathematik mit dem Nebenfach Physik. Die Diplomvorprüfung bestand ich im November 1968, die Diplomhauptprüfung im Dezember 1971. In meiner Diplomarbeit habe ich das von Herrn Prof. Dr. Preuß gestellte Thema "n-zusammenhängende Räume" behandelt. Meine Lehrer in Mathematik waren die Professoren Berendt, Berger, Grottemeyer, Herrlich, Meschkowski, Münzner, Orsinger, Preuß, Ringel, Schmitz, Stöhr, Tippe und die Assistenzprofessoren Boehme und Ringleb, in Physik die Professoren Eichler, Matthias, Mütter, Päsler, Törring und Wilking.

Die vorliegende Dissertation entstand unter Leitung von Herrn Prof. Dr. Preuß. Die Arbeit wurde durch ein Promotionsstipendium der Freien Universität Berlin gefördert.

